B. G. TEUBNER'S LEHRBÜCHER
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN XIII

D. SELIWANOFF

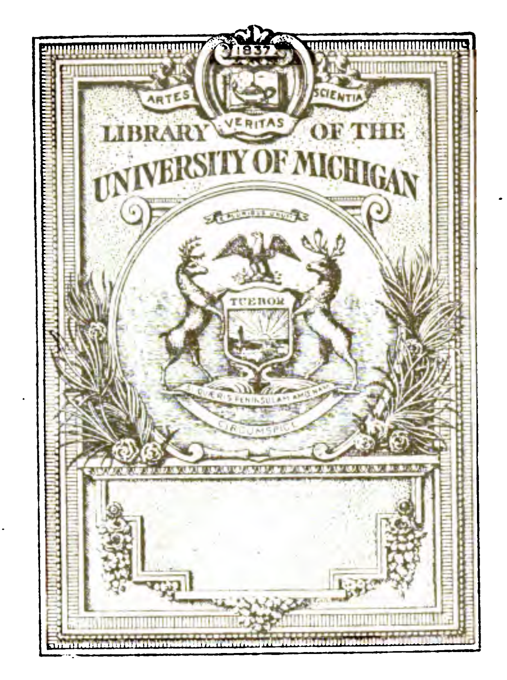
LEHRBUCH
DER DIFFERENZENRECHNUNG

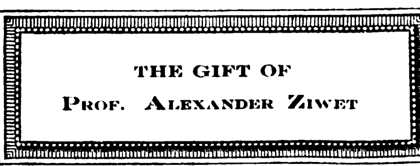
B. G. T … ichern
auf den … Vissen-
schafte … ungen.



In … Titel in
zw … nfassenden
W … ematischen
W …

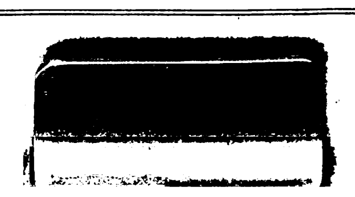
Die an … e bis jetzt
erschienenen … n Wissen-
schaften ge … n von der
Deutschen … gegebenen
eingehenden … ik zu teil
geworden is … ultate der
wissenschaft … emüht ist,
sich das Be … nd macht,
durch welch … schiedenen
Gebieten m … tspunkten
geordnet u … n.





Die er … e Referate
in den Ja … gung be-
absichtigen … ientierung
bestimmter … esicherten
Resultaten … gaben die
historische Entwickelung der Methoden darzulegen. Darüber hinaus aber mufs auf eine eingehende, mit Beweisen versehene Darstellung, wie sie zum selbständigen, von umfangreichen Quellenstudien unabhängigen Eindringen in die Disciplin erforderlich ist, auch bei den breiter angelegten Referaten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, in welcher hauptsächlich das historische und teilweise auch das kritische Element zur Geltung kommt, verzichtet werden. Eine solche ausführliche Darlegung, die sich mehr in dem Charakter eines auf geschichtlichen und litterarischen Studien gegründeten Lehrbuches bewegt und neben den rein wissenschaftlichen auch pädagogische Interessen berücksichtigt, erscheint aber bei der raschen Entwickelung und dem Umfang des zu einem grofsen Teil nur in Monographien niedergelegten Stoffes durchaus wichtig, zumal, im Vergleiche z. B. mit Frankreich, bei uns in Deutschland die mathematische Litteratur an Lehrbüchern über spezielle Gebiete der mathematischen Forschung nicht allzu reich ist.

Die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner giebt sich der Hoffnung hin, dafs sich recht zahlreiche Mathematiker, Physiker und Astronomen, Geodäten und Techniker, sowohl des In- als des Auslandes, in deren Forschungsgebieten derartige Arbeiten erwünscht sind, zur Mitarbeiter-



schaft an dem Unternehmen entschliefsen möchten. Besonders nahe liegt die Beteiligung den Herren Mitarbeitern an der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Die umfangreichen litterarischen und speziell fachlichen Studien, welche für die Bearbeitung von Abschnitten der Encyklopädie vorzunehmen waren, konnten in dem notwendig eng begrenzten Rahmen nicht vollständig niedergelegt werden. Hier aber, bei den Werken der gegenwärtigen Sammlung, ist die Möglichkeit gegeben, den Stoff freier zu gestalten und die individuelle Auffassung und Richtung des einzelnen Bearbeiters in höherem Mafse zur Geltung zu bringen. Doch ist, wie gesagt, jede Arbeit, die sich dem Plane der Sammlung einfügen läfst, im gleichen Mafse willkommen.

Bisher haben die folgenden Gelehrten ihre geschätzte Mitwirkung zugesagt, während erfreulicherweise stetig neue Anerbieten zur Mitarbeit an der Sammlung einlaufen, worüber in meinen „Mitteilungen" fortlaufend berichtet werden wird (die bereits erschienenen Bände sind mit zwei **, die unter der Presse befindlichen mit einem * bezeichnet):

**P. Bachmann, niedere Zahlentheorie. (Band X der Sammlung.)

M. Bôcher, über die reellen Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

G. Bohlmann, Versicherungsmathematik.

G. H. Bryan, Lehrbuch der Thermodynamik.

G. Castelnuovo und **F. Enriques,** Theorie der algebraischen Flächen.

**E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. (Band IX.)

**L. E. Dickson, Linear Groups with an exposition of the Galois Field theory. [In englischer Sprache.] (Band VI.)

F. Dingeldey, Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme.

F. Dingeldey, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung.

G. Eneström (in Verbindung mit andern Gelehrten), Handbuch der Geschichte der Mathematik.

F. Enriques, Prinzipien der Geometrie.

Ph. Furtwängler, die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen.

**A. Gleichen, Optische Abbildungslehre u. Theorie der optischen Instrumente. (Band VIII.)

M. Grübler, Lehrbuch der hydraulischen Motoren.

J. Harkness, elliptische Funktionen.

L. Henneberg, Lehrbuch der graphischen Statik.

K. Heun, die kinetischen Probleme der modernen Maschinenlehre.

G. Jung, Geometrie der Massen.

G. Kohn, rationale Kurven.

**A. Krazer, Handbuch der Lehre von den Thetafunktionen. (Band XII.)

H. Lamb, Akustik.

R. v. Lilienthal, Differentialgeometrie.

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSZ IHRER ANWENDUNGEN.
BAND XIII.

LEHRBUCH

DER DIFFERENZENRECHNUNG

VON

DEMETRIUS SELIWANOFF,
PRIVAT-DOZENT AN DER UNIVERSITÄT UND PROFESSOR AN DEN
HÖHEREN FRAUENKURSEN ZU ST. PETERSBURG.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1904.

Vorwort.

Die älteren Werke über Differenzenrechnung besitzen nicht die Strenge, die unsrer Zeit eigentümlich ist. In dieser Beziehung ist befriedigend das Buch von A. A. Markoff (Differenzenrechnung, St. Petersburg 1889—1891; deutsch von Th. Friesendorf und E. Prümm. Leipzig, bei B. G. Teubner. 1896). Ich habe versucht einige Verbesserungen zu machen. Vielleicht ist es mir gelungen einige Beweise zu vereinfachen und den Stoff systematischer anzuordnen. Um die Arbeit den Studierenden zu erleichtern, habe ich speziellere Probleme beiseite gelassen und mich hauptsächlich auf elementare Fragen beschränkt.

Worin nach meiner Meinung das Wesentliche in der Differenzenrechnung besteht, habe ich in einem Referat dargestellt. (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, p. 918—937.) Dort findet man hinreichende Literaturangaben. In kleinem Raume konnte ich nur Sätze aussprechen, die Beweise sollte der Leser selbst suchen. Um ihm die erforderliche Mühe und Zeit zu ersparen, folge ich dem Vorschlag des Herrn B. G. Teubner und übergebe der Öffentlichkeit dieses Lehrbuch.

St. Petersburg, den 6. Dezember 1903.

D. Seliwanoff.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Differenzen.

Erstes Kapitel.

Hauptsätze über Differenzen.

Zweites Kapitel.

Interpolation.

Drittes Kapitel.

Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale.

Zweiter Teil.

Summen.

Erstes Kapitel.

Unbestimmte und bestimmte Summen.

Zweites Kapitel.

Die Jacob Bernoullische Funktion.

Drittes Kapitel.

Eulersche Summationsformel.

Viertes Kapitel.

Anwendungen der Eulerschen Formel.

Dritter Teil.

Differenzengleichungen.

Erstes Kapitel.

Allgemeines über Differenzengleichungen.

Zweites Kapitel.

Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung.

Drittes Kapitel.

Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Erster Teil.

Differenzen.

Erstes Kapitel.

Hauptsätze über Differenzen.

1. Definitionen. Wenn eine Funktion $f(x)$ gegeben ist, so heißt der Ausdruck $f(x+h)-f(x)$ *Differenz* von $f(x)$, in Zeichen:

$$f(x+h)-f(x)=\Delta f(x).$$

Wenn man diesen Ausdruck in eine andre Form bringt, so entsteht die Gleichung

$$f(x+h)-f(x)=\varphi(x)$$

oder

$$\Delta f(x)=\varphi(x).$$

Hier kann x beliebige Werte annehmen, h soll aber konstant bleiben.

Ist z. B. $f(x)=x^3$, $h=1$, so hat man

$$f(0)=0, \quad f(1)=1, \quad f(2)=8, \quad f(3)=27, \quad f(4)=64, \ldots$$
$$\Delta f(0)=1, \quad \Delta f(2)=7, \quad \Delta f(3)=19, \quad \Delta f(4)=37, \ldots$$

Die Differenz von $\Delta f(x)$ heißt *zweite Differenz* von $f(x)$ oder *Differenz zweiter Ordnung*:

$$\Delta^2 f(x)=\Delta f(x+h)-\Delta f(x).$$

Entsprechend ist

$$\Delta^3 f(x)=\Delta^2 f(x+h)-\Delta^2 f(x), \quad \Delta^4 f(x)=\Delta^3 f(x+h)-\Delta^3 f(x), \ldots$$

In dem Beispiel ist

$$\Delta^2 f(0)=6, \quad \Delta^2 f(1)=12, \quad \Delta^2 f(2)=18, \ldots$$
$$\Delta^3 f(0)=6, \quad \Delta^3 f(1)=6, \ldots$$
$$\Delta^4 f(0)=0, \ldots$$

Diese Resultate lassen sich in folgender Tabelle zusammenstellen:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0	1	6	6	0
1	1	7	12	6	
2	8	19	18		
3	27	37			
4	64				

2. Differenzen einfacher Funktionen. Unter einfachen Funktionen versteht man diejenigen, deren Differenz direkt bestimmt werden kann. Die Funktion heißt zusammengesetzt, wenn ihre Differenz durch die Differenzen andrer Funktionen ausgedrückt werden kann.

In der Differentialrechnung ist

$$(x^n)' = n x^{n-1}.$$

Die Differenz von x^n hat keine einfache Form, weil

$$\Delta x^n = nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} h^2 x^{n-2} + \cdots + h^n$$

ist. Die einfache Funktion, die der Potenz entspricht, ist in der Differenzenrechnung die folgende

$$f(x) = x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}h).$$

Die direkte Rechnung ergibt

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)x(x-h)\ldots(x-\overline{n-2}h)$$
$$-x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}h).$$

Um diesen Ausdruck zu transformieren, setzen wir vor die Klammern den gemeinsamen Faktor

$$x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-2}h)$$

und machen Reduktionen in den Klammern.

Auf diese Weise findet man die Formel

$$\Delta[x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}h)]$$
$$= nhx(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-2}h).$$

Spezielle Fälle dieser Formel sind

$$\Delta x = h, \quad \Delta[x(x-h)] = 2hx,$$
$$\Delta[x(x-h)(x-2h)] = 3hx(x-h), \ldots$$

Etwas einfacher ist die Formel

$$\Delta \frac{x(x-h)(x-2h)\dots(x-\overline{n-1}\,h)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} = h\cdot\frac{x(x-h)(x-2h)\dots(x-\overline{n-2}\,h)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)},$$

die ganz analog bewiesen wird.

Wir werden noch folgende einfache Funktionen angeben:

$$\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{n-1}\,h)},\quad m^x,\quad \sin x,\quad \cos x.$$

Hier ist m eine Konstante.

Die direkte Rechnung ergibt

$$\Delta \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{n-1}\,h)} = \frac{1}{(x+h)(x+2h)(x+3h)\dots(x+nh)}$$

$$-\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{n-1}\,h)}$$

$$= \frac{1}{(x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{n-1}\,h)}\left[\frac{1}{x+nh}-\frac{1}{x}\right]$$

$$= -nh\cdot\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+nh)}.$$

Spezielle Fälle dieser Formel sind

$$\Delta\frac{1}{x} = -h\cdot\frac{1}{x(x+h)},\quad \Delta\frac{1}{x(x+h)} = -2h\cdot\frac{1}{x(x+h)(x+2h)},\dots$$

Etwas symmetrischer ist die Formel

$$\Delta\frac{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{n-1}\,h)} = -h\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\dots n}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+nh)}.$$

Eine sehr einfache Funktion ist m^x, weil

$$\Delta m^x = m^{x+h} - m^x = m^x(m^h-1).$$

Um die Differenz dieser Funktion zu bilden, genügt es, m^x mit dem konstanten Faktor $m^h - 1$ zu multiplizieren.

Nach den bekannten Formeln der Trigonometrie ist

$$\sin(x+h)-\sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos(x+h)-\cos x = -2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}+\frac{\pi}{2}\right).$$

Also wird

$$\Delta\sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h+\pi}{2}\right),$$

$$\Delta\cos x = -2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right) = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h+\pi}{2}\right).$$

Die wiederholte Anwendung der angegebenen Formeln liefert uns folgende Ausdrücke für Differenzen höherer Ordnung

$$\Delta^m \frac{x(x-h)(x-2h)\dots(x-\overline{n-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} = h^m\cdot\frac{x(x-h)\dots(x-\overline{n-m-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-m)} \text{ für } m<n;$$

$$\Delta^n \frac{x(x-h)(x-2h)\dots(x-\overline{n-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n} = h^n,$$

$$\Delta^m \frac{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+\overline{n-1}h)} = (-h)^m\frac{1\cdot 2\cdot 3\dots(n+m-1)}{x(x+h)\dots(x+\overline{n+m-1}h)},$$

$$\Delta^n m^x = m^x(m^h-1)^n,$$

$$\Delta^n \sin x = \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^n\cdot\sin\left(x+n\cdot\frac{h+\pi}{2}\right),$$

$$\Delta^n \cos x = \left(2\sin\frac{h}{2}\right)^n\cdot\cos\left(x+n\cdot\frac{h+\pi}{2}\right).$$

Das sind die wichtigsten Formeln, die für das Folgende ausreichen.

3. Differenzen zusammengesetzter Funktionen. Wenn

$$f(x) = \varphi(x) + C,$$

wobei C eine Konstante ist, so ist

$$f(x+h) - f(x) = [\varphi(x+h) + C] - [\varphi(x) + C] = \varphi(x+h) - \varphi(x),$$

also

$$\Delta f(x) = \Delta\varphi(x).$$

Bei der Berechnung der Differenz kann also der konstante Summand weggelassen werden.

Wenn

$$f(x) = C\varphi(x)$$

ist, so ist

$$\Delta f(x) = C\varphi(x+h) - C\varphi(x) = C[\varphi(x+h) - \varphi(x)]$$

oder

$$\Delta[C\varphi(x)] = C\Delta\varphi(x).$$

Der konstante Faktor kann also vor das Zeichen Δ gesetzt werden.

Ist die gegebene Funktion $f(x)$ Summe von mehreren Funktionen:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_\mu(x),$$

so findet man

$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= [f_1(x+h)+f_2(x+h)+\cdots+f_\mu(x+h)] - [f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_\mu(x)]\\ &= [f_1(x+h)-f_1(x)] + [f_2(x+h)-f_2(x)] + \cdots + [f_\mu(x+h)-f_\mu(x)].\end{aligned}$$

Es besteht also die Formel

$$\Delta[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_\mu(x)] = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x) + \cdots + \Delta f_\mu(x).$$

Die bewiesenen Sätze lassen sich in einer Formel vereinigen. Es ist

$$\Delta[C + C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \cdots + C_\mu f_\mu(x)]$$
$$= C_1 \Delta f_1(x) + C_2 \Delta f_2(x) + \cdots + C_\mu \Delta f_\mu(x),$$

wobei $C, C_1, C_2, \ldots, C_\mu$ konstant sind.

4. Differenzen ganzer Funktionen. Es sei

$$f(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_{n-1} x + p_n.$$

Es ist bequemer, diese Funktion zuerst in die Form

$$f(x) = A_0 + A_1 \frac{x-a}{1} + A_2 \frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2} + A_3 \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$
$$\cdots + A_n \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$

zu bringen. Zur Bestimmung der Koeffizienten bemerken wir, daß bei der Division von $f(x)$ durch $x-a$ der Rest A_0 ist und der Quotient

$$f_1(x) = A_1 + A_2 \frac{x-a-h}{1\cdot 2} + A_3 \frac{(x-a-h)(x-a-2h)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$
$$\cdots + A_n \frac{(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

Es ist noch zu bemerken, daß $f_1(x)$ die Form hat

$$f_1(x) = p_0 x^{n-1} + \cdots$$

Dividiert man $f_1(x)$ durch $x-a-h$, so findet man den Rest A_1 und den Quotient

$$f_2(x) = A_2 \frac{1}{1\cdot 2} + A_3 \frac{x-a-2h}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + A_n \frac{(x-a-2h)\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

Das erste Glied von $f_2(x)$ ist $p_0 x^{n-2}$.
Schließlich ist

$$f_{n-1}(x) = A_{n-1}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\ldots(n-1)} + A_n \frac{x-a-\overline{n-1}\,h}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = p_0 x + q.$$

Hier ist q eine Zahl, die sich vollständig bestimmen läßt.

Durch Division von $f_{n-1}(x)$ durch $x-a-\overline{n-1}$ findet man den Rest $\frac{A_{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}$ und den Quotient $\frac{A_n}{1\cdot 2\ldots n}$. Dieser Quotient ist aber p_0. Es ist also

$$\frac{A_n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = p_0.$$

Nachdem die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ bestimmt sind, erhält man mit Anwendung der Formeln (Nr. 2):

$$\Delta f(x) = h\left[A_1 + A_2\frac{x-a}{1} + \cdots + A_n\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-2}h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}\right],$$

$$\Delta^2 f(x) = h^2\left[A_2 + A_3\frac{x-a}{1} + \cdots + A_n\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-3}h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-2)}\right],$$

. . . .

$$\Delta^n f(x) = h^n\cdot A_n$$

oder

$$\Delta^n f(x) = h^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot p_0.$$

Es besteht also der Satz:

Die erste Differenz einer ganzen Funktion n^{ten} Grades ist vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade und die n^{te} Differenz ist konstant.

Für $x = a$ ist

$$f(a) = A_0,\quad \Delta f(a) = h\cdot A_1,\quad \Delta^2 f(a) = h^2\cdot A_2,\ldots$$
$$\Delta^n f(a) = h^n\cdot A_n.$$

Wir sehen, daß die Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sich durch Differenzen ausdrücken lassen:

$$A_0 = f(a),\quad A_1 = \frac{\Delta f(a)}{h},\quad A_2 = \frac{\Delta^2 f(a)}{h^2},\ldots, A_n = \frac{\Delta^n f(a)}{h^n}.$$

Diese Werte der Differenzen bestimmen sich durch die Werte der Funktion $f(x)$:

$$f(a),\quad f(a+h),\quad f(a+2h),\ldots, f(a+nh).$$

Da aber $f(x)$ eine beliebige ganze Funktion n^{ten} Grades ist, so besteht die Formel

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1}\cdot\frac{\Delta f(a)}{h} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2}\cdot\frac{\Delta^2 f(a)}{h^2} + \cdots$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\frac{\Delta^n f(a)}{h^n}$$

für jede Funktion von der Form

$$f(x) = p_0x^n + p_1x^{n-2} + p_2x^{n-2} + \cdots + p_{n-1}x + p_n,$$

wobei einige Koeffizienten gleich Null sein können.

Das ist die **Newtonsche Interpolationsformel.**

Es sei z. B.

$$a = 0,\quad h = 1,\quad f(x) = x^3.$$

Wir haben schon in Nr. 1 gesehen, daß

$$f(0) = 0,\quad \Delta f(0) = 1,\quad \Delta^2 f(0) = 6,\quad \Delta^3 f(0) = 6.$$

Folglich ist

$$x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2).$$

Als zweites Beispiel nehmen wir

$$a=0,\quad h=1,\quad f(x)=\frac{(x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

Hier ist y konstant vorausgesetzt.

Nach der bewiesenen Formel (Nr. 2) ist

$$\Delta^m f(0)=\frac{y(y-1)\ldots(y-n+m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-m)}.$$

Daraus folgt, daß

$$\frac{(x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}=\frac{y(y-1)\ldots(y-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}$$
$$+\frac{x}{1}\cdot\frac{y(y-1)\ldots(y-n+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{y(y-1)\ldots(y-n+3)}{1\cdot 2\ldots(n-2)}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

Diese Relation besteht für beliebige Werte von x und y; sie ist von Cauchy benutzt worden, um den binomischen Lehrsatz auf beliebige reelle Exponenten auszudehnen.*

5. Differenz des Produktes zweier Funktionen. Wenn man die Differenzen zweier Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ kennt, so ist es leicht, die Differenz ihres Produktes zu bilden. . . . .

Wenn $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ ist, so ist

$$\begin{aligned}\Delta f(x)&=\varphi(x+h)\cdot\psi(x+h)-\varphi(x)\cdot\psi(x)\\&=[\varphi(x)+\Delta\varphi(x)]\psi(x+h)-\varphi(x)\cdot\psi(x)\\&=\varphi(x)[\psi(x+h)-\psi(x)]+\psi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x).\end{aligned}$$

Man findet also die Formel

$$\Delta[\varphi(x)\cdot\psi(x)]=\varphi(x)\cdot\Delta\psi(x)+\psi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x).$$

Z. B. für $h=1$ ist

$$\Delta\left[3^x\cdot\frac{x(x-1)}{2}\right]=3^x\cdot x+\frac{(x+1)x}{2}\cdot 3^x\cdot 2=\frac{x(x-1)}{2}\cdot 3^x\cdot 2+3^{x+1}\cdot x.$$

6. Differenzen von $\sin u$ und $\cos u$. Wir wollen voraussetzen, daß u eine Funktion von x ist, deren Differenz bekannt ist. Es ist $\Delta\sin u$ und $\Delta\cos u$ zu berechnen.

Wenn man x durch $x+h$ ersetzt, so geht u in $u+\Delta u$ über. Deswegen ist

$$\Delta\sin u=\sin(u+\Delta u)-\sin u=2\sin\frac{\Delta u}{2}\cdot\cos\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right),$$

$$\Delta\cos u=\cos(u+\Delta u)-\cos u=-2\sin\frac{\Delta u}{2}\cdot\sin\left(u+\frac{\Delta u}{2}\right).$$

---

* Cauchy, Cours d'analyse, p. 159. Paris. 1821.

Damit beschließen wir die Sätze über Differenzen zusammengesetzter Funktionen.

7. Berechnung äquidistanter Werte einer ganzen Funktion. Es sei $f(x)$ eine ganze Funktion n^{ten} Grades, deren Werte

$$f(a),\quad f(a+h),\quad f(a+2h),\ldots,\quad f(a+nh)$$

ausgerechnet seien.

Es sollen die Werte

$$f(a+\overline{n+1}h),\quad f(a+\overline{n+2}h),\quad f(a+\overline{n+3}h),\ldots$$

und

$$f(a-h),\quad f(a-2h),\quad f(a-3h),\ldots$$

bestimmt werden.

Diese Aufgabe läßt sich leicht mit Hilfe der Differenzen auflösen.

Durch wiederholte Subtraktionen bestimmt man die Reihe der Werte

$$\begin{array}{llll}
\Delta\ f(a), & \Delta\ f(a+h), & \Delta f(a+2h),\ldots, & \Delta f(a+\overline{n-1}h),\\
\Delta^2 f(a), & \Delta^2 f(a+h), & \Delta^2 f(a+2h),\ldots, & \Delta^2 f(a+\overline{n-2}h),\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\Delta^{n-1} f(a), & \Delta^{n-1} f(a+h), & & \\
\Delta^{n}\ f(a). & & &
\end{array}$$

Da aber $\Delta^n f(x)$ konstant ist (Nr. 4), so ist

$$\Delta^n f(a+h) = \Delta^n f(a).$$

Mit Benutzung der Formel

$$\Delta^{k-1} f(x+h) = \Delta^{k-1} f(x) + \Delta^k f(x)$$

und durch wiederholte Additionen erhält man die Werte

$$\begin{array}{lll}
\Delta^{n-1} f(a+2h) & = \Delta^{n-1} f(a+h) & + \Delta^{n}\ f(a+h),\\
\Delta^{n-2} f(a+3h) & = \Delta^{n-2} f(a+2h) & + \Delta^{n-1} f(a+2h),\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
\Delta^2\ f(a+\overline{n-1}h) & = \Delta^2\ f(a+\overline{n-2}h) & + \Delta^3\ f(a+\overline{n-2}h),\\
\Delta\ f(a+nh) & = \Delta\ f(a+\overline{n-1}h) & + \Delta^2\ f(a+\overline{n-1}h),\\
f(a+\overline{n+1}h) & = f(a+nh) & + \Delta\ f(a+nh).
\end{array}$$

In derselben Weise werden auch die Werte

$$f(a+\overline{n+2}h),\quad f(a+\overline{n+3}h),\ldots$$

berechnet.

Um $f(a-h)$ zu bestimmen, bemerken wir, daß

$$\Delta^n f(a-h) = \Delta^n f(a)$$

ist, und daß die Relation

$$\Delta^{k-1} f(x) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^k f(x)$$

besteht.

Wiederholte Subtraktionen geben uns die Werte

$$\begin{aligned}
\Delta^{n-1} f(a-h) &= \Delta^{n-1} f(a) - \Delta^n f(a-h),\\
\Delta^{n-2} f(a-h) &= \Delta^{n-2} f(a) - \Delta^{n-1} f(a-h),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta^2 f(a-h) &= \Delta^2 f(a) - \Delta^3 f(a-h),\\
\Delta f(a-h) &= \Delta f(a) - \Delta^2 f(a-h),\\
f(a-h) &= f(a) - \Delta f(a-h).
\end{aligned}$$

Ebenso findet man auch die Werte

$$f(a-2h), \quad f(a-3h), \ldots$$

Als Beispiel nehmen wir

$$a = -1, \quad h = 1, \quad f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

Die Rechnung gibt

$$f(-1) = 1, \quad f(0) = -1, \quad f(1) = -1.$$

Durch Subtraktionen findet man

$$\begin{aligned}
&\Delta f(-1) = -2, \quad \Delta f(0) = 0,\\
&\Delta^2 f(-1) = 2.
\end{aligned}$$

Nach der bewiesenen Formel (Nr. 4) ist aber

$$\Delta^3 f(x) = 6$$

für jedes x.

Die Anwendung der Additionen gibt uns

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 f(0) = 8, \quad \Delta f(1) = 8, \quad f(2) = 7;\\
&\Delta^2 f(1) = 14, \quad \Delta f(2) = 22, \quad f(3) = 29.
\end{aligned}$$

Um $f(-2)$ und $f(-3)$ zu bestimmen, sind folgende Rechnungen auszuführen:

$$\begin{aligned}
&\Delta^2 f(-2) = -4, \quad \Delta f(-2) = 2, \quad f(-2) = -1;\\
&\Delta^2 f(-3) = -10, \quad \Delta f(-3) = 12, \quad f(-3) = -13.
\end{aligned}$$

Diese Resultate lassen sich in der Tabelle zusammenstellen:

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
-3	-13	12	-10	6
-2	-1	2	-4	6
-1	1	-2	2	6
0	-1	0	8	6
1	-1	8	14	
2	7	22		
3	29			

Aus den Vorzeichen von $f(x)$ erkennt man, daß die Gleichung $f(x) = 0$ drei reelle Wurzeln hat, die in den Intervallen $(-2, -1)$, $(-1, 0)$ und $(1, 2)$ liegen.

Diese Methode führt immer zur Absonderung der Wurzeln einer numerischen Gleichung, sobald der absolute Betrag der Differenz zweier Wurzeln kleiner als Eins ist.

8. Relationen zwischen den sukzessiven Werten und Differenzen einer Funktion. Wir stellen uns die Aufgabe, die Werte

$$f(a), \quad \Delta f(a), \quad \Delta^2 f(a), \ldots, \quad \Delta^n f(a)$$

durch

$$f(a), \quad f(a+h), \quad f(a+2h), \ldots, \quad f(a+nh)$$

auszudrücken.

Um die Schreibweise abzukürzen, wollen wir folgende Bezeichnungen einführen:

$$f(a) = u_0, \quad f(a+h) = u_1, \quad f(a+2h) = u_2, \ldots, \quad f(a+nh) = u_n.$$

Die gesuchte Relation kann auf symbolischem Wege gefunden werden.

In der Gleichung

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$$

können symbolisch die Indizes durch Exponenten ersetzt werden. Wenn man aus der Gleichung

$$\Delta u^k = u^{k+1} - u^k$$

den gemeinsamen Faktor u^k wegläßt, so wird

$$\Delta = u - 1.$$

Daraus folgt

$$\Delta^m = u^m - m u^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} u^{m-2} - \cdots + (-1)^m.$$

Nach Multiplikation mit u^k und Ersetzen der Exponenten durch Indizes erhält man

$$\Delta^m u_k = u_{k+m} - m u_{k+m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} u_{k+m-2} - \cdots + (-1)^m u_k.$$

Diese Formel ist damit zwar gefunden, aber noch nicht bewiesen. Das kann in verschiedener Weise geschehen.

Wenn man in der Gleichung

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$$

a durch $a+h$ ersetzt, so vermehren sich alle Indizes um Eins und es wird

$$\Delta u_{k+1} = u_{k+2} - u_{k+1}.$$

Durch Subtraktion findet man

$$\Delta^2 u_k = u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k.$$

In derselben Weise fährt man weiter fort

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u_{k+1} &= u_{k+3} - 2u_{k+2} + u_{k+1},\\
\Delta^3 u_k &= (u_{k+3} - 2u_{k+2} + u_{k+1}) - (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k)\\
&= u_{k+3} - 3u_{k+2} + 3u_{k+1} - u_k,\\
\Delta^3 u_{k+1} &= u_{k+4} - 3u_{k+3} + 3u_{k+2} - u_{k+1},\\
\Delta^4 u_k &= (u_{k+4} - 3u_{k+3} + 3u_{k+2} - u_{k+1}) - (u_{k+3} - 3u_{k+2} + 3u_{k+1} - u_k)\\
&= u_{k+4} - 4u_{k+3} + 6u_{k+2} - 4u_{k+1} + u_k.
\end{aligned}$$

Damit ist die Richtigkeit der gefundenen Formel für

$$m = 1,\ 2,\ 3 \text{ und } 4$$

bewiesen. Durch vollständige Induktion läßt sich zeigen, daß die Formel allgemein gültig ist.

Wir werden aber einen andern Weg einschlagen. Aus der früheren Betrachtung folgt, daß $\Delta^m u_k$ die Form hat

$$\Delta^m u_k = A_0 u_{k+m} + A_1 u_{k+m-1} + A_2 u_{k+m-2} + \cdots + A_m u_k,$$

weil wir immer mit linearen und homogenen Funktionen der u zu tun haben. Die Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_m$ sind von der Funktion $f(x)$, von a und h unabhängig. Deswegen genügt es, diese Koeffizienten in einem speziellen Falle zu bestimmen.

Wir setzen

$$a = 0, \quad h = 1, \quad f(x) = c^x$$

und finden

$$u_0 = 1, \quad u_1 = c, \quad u_2 = c^2, \ldots, \quad u_{k+m} = c^{k+m},$$

$$\Delta^m u_k = c^k (c-1)^m,$$

$$c^k (c-1)^m = A_0 c^{k+m} + A_1 c^{k+m-1} + A_2 c^{k+m-2} + \cdots + A_m c^k.$$

Folglich ist

$$(c-1)^m = A_0 c^m + A_1 c^{m-1} + A_2 c^{m-2} + \cdots + A_m.$$

Die Koeffizienten A sind aber aus dem binomischen Lehrsatze bekannt.

Es ist also allgemein

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -m, \quad A_2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \ldots, \quad A_m = (-1)^m.$$

Setzt man in der bewiesenen Formel

$$k = 0, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

so erhält man die gewünschten Formeln

$$\Delta\, u_0 = u_1 - u_0,$$

$$\Delta^2 u_0 = u_2 - 2u_1 + u_0,$$

$$\Delta^3 u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^n u_0 = u_n - n\,u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u_{n-2} - \cdots + (-1)^n u_0.$$

9. Jetzt wollen wir zur umgekehrten Aufgabe übergehen. Es sollen die Werte

$$f(a), \quad f(a+h), \quad f(a+2h), \ldots, \quad f(a+nh)$$

durch

$$f(a), \quad \Delta f(a), \quad \Delta^2 f(a), \ldots, \quad \Delta^n f(a)$$

ausgedrückt werden.

Aus der Formel

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$$

folgt

$$u_{k+1} = u_k + \Delta u_k.$$

Symbolisch ist

$$u^{k+1} = u^k + \Delta u^k$$

oder

$$u = 1 + \Delta.$$

Daraus ergibt sich

$$u^m \quad = 1 + m\Delta + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 + \cdots + \Delta^m,$$

$$u^{m+k} = u^k + m\,\Delta u^k + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 u^k + \cdots + \Delta^m u^k,$$

$$u_{m+k} = u_k + m\,\Delta u_k + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 u_k + \cdots + \Delta^m u_k.$$

Um diese Formel zu beweisen, beginnen wir mit den Fällen $m = 1, 2, 3$.

Wir haben schon gesehen, daß

$$u_{k+1} = u_k + \Delta u_k.$$

Daraus folgt (Nr. 3)

$$\begin{aligned}
\Delta u_{k+1} &= \Delta u_k + \Delta^2 u_k,\\
u_{k+2} &= (u_k + \Delta u_k) + (\Delta u_k + \Delta^2 u_k) = u_k + 2\Delta u_k + \Delta^2 u_k,\\
\Delta u_{k+2} &= \Delta u_k + 2\Delta^2 u_k + \Delta^3 u_k,\\
u_{k+3} &= (u_k + 2\Delta u_k + \Delta^2 u_k) + (\Delta u_k + 2\Delta^2 u_k + \Delta^3 u_k)\\
&= u_k + 3\Delta u_k + 3\Delta^2 u_k + \Delta^3 u_k.
\end{aligned}$$

Wir haben hier immer lineare und homogene Funktionen von $u_k, \Delta u_k, \Delta^2 u_k, \ldots$, folglich ist

$$u_{k+m} = B_0 u_k + B_1 \Delta u_k + B_2 \Delta^2 u_k + \cdots + B_m \Delta^m u_k,$$

wo die Koeffizienten von der Wahl der Funktion $f(x)$ unabhängig sind.

Für

$$a = 0, \quad h = 1, \quad f(x) = c^x$$

findet man

$$c^{k+m} = B_0 c^k + B_1 c^k (c-1) + B_2 c^k (c-1)^2 + \cdots + B_m c^k (c-1)^m$$

oder

$$c^m = B_0 + B_1 (c-1) + B_2 (c-1)^2 + \cdots + B_m (c-1)^m.$$

Setzt man $c = 1 + t$ ein, so wird

$$(1+t)^m = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \cdots + B_n t^n.$$

Die gesuchten Koeffizienten haben also die Werte

$$B_0 = 1, \quad B_1 = m, \quad B_2 = \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \ldots, \quad B_n = 1.$$

Es bestehen daher die Formeln

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 + \Delta u_0,\\
u_2 &= u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0,\\
u_3 &= u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_n &= u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 u_0 + \cdots + \Delta^n u_0.
\end{aligned}$$

Alle diese Formeln können durch die Formel

$$u_z = u_0 + z\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 u_0 + \cdots + \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\Delta^n u_0$$

umfaßt werden. Hier kann z nur die Werte

$$z = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$$

annehmen.

Damit schließen wir dieses Kapitel und gehen zu Anwendungen der bewiesenen Sätze über.

Zweites Kapitel.

Interpolation.

10. Genaue Interpolation. Die einfachste Aufgabe ist die folgende: Es sind die Werte einer ganzen Funktion $f(t)$ von nicht höherem als n^{ten} Grade gegeben

$$f(a), \quad f(a+h), \quad f(a+2h), \ldots, \quad f(a+nh).$$

Es soll der Wert der Funktion für $t = x$ berechnet werden. Diese Aufgabe war schon gelöst für den Fall, daß $\frac{x-a}{h}$ gleich einer ganzen Zahl ist (Nr. 7).

Die bekannten Werte können wir wieder mit

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$$

bezeichnen. Es ist also der Wert der Funktion u_z gegeben für

$$z = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Nach der bewiesenen Formel (Nr. 9) ist

$$u_z = u_0 + z\Delta u_0 + \frac{z(z-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 u_0 + \cdots + \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\Delta^n u_0$$

für diese Werte von z.

Wenn wir setzen

$$z = \frac{t-a}{h},$$

so ist

$$F(t) = u_0 + \frac{t-a}{h} \cdot \Delta u_0 + \frac{(t-a)(t-a-h)}{1 \cdot 2 \cdot h^2}\Delta^2 u_0 + \cdots$$
$$+ \frac{(t-a)(t-a-h)\ldots(t-a-\overline{n-1}\,h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\Delta^n u_0$$

eine ganze Funktion, bei der die Relation

$$F(t) = f(t)$$

für $n+1$ verschiedene Werte von t besteht. Diese Relation muß identisch erfüllt sein, weil die algebraische Gleichung $F(t) - f(t) = 0$ von nicht höherem als n^{ten} Grade nicht mehr als n verschiedene Wurzeln besitzen kann. Wenn wir $t = x$ setzen, so finden wir

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1 \cdot 2 \cdot h^2}\Delta^2 f(a) + \cdots$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\Delta^n f(a).$$

Das ist die Newtonsche Interpolationsformel, der wir schon früher begegneten (Nr. 4).

11. Andre Aufgaben der Interpolation wollen wir nur für ganze Funktionen von nicht höherem als dem 4ten Grade behandeln.

Es sind Werte einer ganzen Funktion $f(t)$ vom 4ten Grade gegeben

$$f(a),\quad f(a+h),\quad f(a+2h),\quad f(a+3h),\quad f(a+4h).$$

Man soll für $t=x$ den Wert der Funktion und ihrer Ableitungen berechnen.

Nach der Newtonschen Formel ist

$$f(t)=f(a)+\frac{t-a}{h}\cdot\Delta f(a)+\frac{(t-a)(t-a-h)}{1\cdot 2h^2}\Delta^2 f(a)$$
$$+\frac{(t-a)(t-a-h)(t-a-2h)}{1\cdot 2\cdot 3h^3}\Delta^3 f(a)+\frac{(t-a)(t-a-h)(t-a-2h)(t-a-3h)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4h^4}\Delta^4 f(a)$$

für jeden Wert von t.

Der Einfachheit wegen setzen wir $t=a+hz$, die Funktion $f(t)$ verwandelt sich dabei in $F(z)$ und wir finden

$$F(z)=f(a)+\frac{z}{1}\Delta f(a)+\frac{z(z-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a)+\frac{z(z-1)(z-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 f(a)$$
$$+\frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 f(a)$$

oder

$$F(z)=f(a)+z\,\Delta f(a)+(z^2-z)\,\frac{\Delta^2 f(a)}{1\cdot 2}+(z^3-3z^2+2z)\cdot\frac{\Delta^3 f(a)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$+(z^4-6z^3+11z^2-6z)\cdot\frac{\Delta^4 f(a)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Durch Differentiation erhält man die Formeln

$$F'\ (z)=\Delta\, f(a)+(2z-1)\cdot\frac{\Delta^2 f(a)}{1\cdot 2}+(3z^2-6z+2)\cdot\frac{\Delta^3 f(a)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$+(4z^3-18z^2+22z-6)\cdot\frac{\Delta^4 f(a)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

$$F''\ (z)=\Delta^2 f(a)+(z-1)\,\Delta^3 f(a)+(6z^2-18z+11)\cdot\frac{\Delta^4 f(a)}{12},$$

$$F'''\,(z)=\Delta^3 f(a)+(2z-3)\,\frac{\Delta^4 f(a)}{2},$$

$$F''''(z)=\Delta^4 f(a).$$

Wenn $z=y$ für $t=x$ ist, so sind die gesuchten Werte

$$f'(x)=\frac{1}{h}F'(y),\quad f''(x)=\frac{1}{h^2}F''(y),\quad f'''(x)=\frac{1}{h^3}F'''(y),$$
$$f^{IV}(x)=\frac{1}{h^4}F^{IV}(y).$$

Hier ist y durch $\frac{x-a}{h}$ zu ersetzen.

Es seien z. B. für eine ganze Funktion $f(t)$ von nicht höherem als 3ten Grade die Werte

$$f(0)=1,\quad f(2)=3,\quad f(4)=53,\quad f(6)=199$$

gegeben.

Es soll $f''(1)$ berechnet werden.

In diesem Falle ist

$$a=0,\quad h=2,\quad x=1,\quad y=\frac{1}{2}$$

$$f''(1)=\frac{1}{4}\left[\Delta^2 f(0)-\frac{1}{2}\Delta^3 f(0)\right]$$

$$\Delta^2 f(0)=53-2\cdot 3+1=48,$$

$$\Delta^3 f(0)=199-3\cdot 53+3\cdot 3-1=48,$$

$$f''(1)=\frac{1}{4}(48-24)=6.$$

12. Für eine ganze Funktion 4ten Grades und für $h=1$ seien die Werte

$$f(0),\quad \Delta f(0),\quad \Delta^2 f(0),\quad \Delta^3 f(0),\quad \Delta^4 f(0)$$

gegeben. Es sollen die Werte

$$f\left(\frac{1}{10}\right),\quad f\left(\frac{2}{10}\right),\quad f\left(\frac{3}{10}\right),\ \ldots,\ f\left(\frac{9}{10}\right)$$

berechnet werden.

Wenn wir die Bezeichnungen

$$\delta f(a)=f\left(a+\frac{1}{10}\right)-f(a),\quad \delta^2 f(a)=\delta f\left(a+\frac{1}{10}\right)-\delta f(a),\ \ldots$$

einführen, so ist nach der Newtonschen Formel

$$f\left(\frac{m}{10}\right)=f(0)+m\,\delta f(0)+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\delta^2 f(0)+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\delta^3 f(0)$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\delta^4 f(0).$$

Die Werte $\delta f(0)$, $\delta^2 f(0)$, $\delta^3 f(0)$ und $\delta^4 f(0)$ lassen sich aus der Formel

$$f(t)=f(0)+t\,\Delta f(0)+\frac{t(t-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(0)+\frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 f(0)$$
$$+\frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^4 f(0)$$

bestimmen, die für jedes t gültig ist. Man findet

$$f(0)=f(0),$$

$$f\left(\frac{1}{10}\right)=f(0)+\frac{1}{10}\Delta f(0)-\frac{9}{200}\Delta^2 f(0)+\frac{57}{2000}\Delta^3 f(0)-\frac{1653}{80000}\Delta^4 f(0),$$

$$f\left(\frac{2}{10}\right)=f(0)+\frac{2}{10}\Delta f(0)-\frac{8}{100}\Delta^2 f(0)+\frac{48}{1000}\Delta^3 f(0)-\frac{336}{10000}\Delta^4 f(0),$$

$$f\left(\frac{3}{10}\right)=f(0)+\frac{3}{10}\Delta f(0)-\frac{21}{200}\Delta^2 f(0)+\frac{119}{2000}\Delta^3 f(0)-\frac{3213}{80000}\Delta^4 f(0),$$

$$f\left(\frac{4}{10}\right)=f(0)+\frac{4}{10}\Delta f(0)-\frac{12}{100}\Delta^2 f(0)+\frac{64}{1000}\Delta^3 f(0)-\frac{416}{10000}\Delta^4 f(0).$$

Die Reihe von Subtraktionen gibt

$$\delta f(0) = \frac{1}{10}\Delta f(0) - \frac{9}{200}\Delta^2 f(0) + \frac{57}{2000}\Delta^3 f(0) - \frac{1653}{80000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}\Delta f(0) - \frac{7}{200}\Delta^2 f(0) + \frac{39}{2000}\Delta^3 f(0) - \frac{1035}{80000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta f\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{1}{10}\Delta f(0) - \frac{5}{200}\Delta^2 f(0) + \frac{23}{2000}\Delta^3 f(0) - \frac{525}{80000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{1}{10}\Delta f(0) - \frac{3}{200}\Delta^2 f(0) + \frac{9}{2000}\Delta^3 f(0) - \frac{115}{80000}\Delta^4 f(0).$$

$$\delta^2 f(0) = \frac{1}{100}\Delta^2 f(0) - \frac{9}{1000}\Delta^3 f(0) + \frac{309}{40000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta^2 f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{100}\Delta^2 f(0) - \frac{8}{1000}\Delta^3 f(0) + \frac{255}{40000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta^2 f\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{1}{100}\Delta^2 f(0) - \frac{7}{1000}\Delta^3 f(0) + \frac{205}{40000}\Delta^4 f(0).$$

$$\delta^3 f(0) = \frac{1}{1000}\Delta^3 f(0) - \frac{27}{20000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta^3 f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{1000}\Delta^3 f(0) - \frac{25}{20000}\Delta^4 f(0).$$

$$\delta^4 f(0) = \frac{1}{10000}\Delta^4 f(0).$$

Die gesuchten Formeln sind also

$$\delta f(0) = \frac{1}{10}\Delta f(0) - \frac{9}{200}\Delta^2 f(0) + \frac{57}{2000}\Delta^3 f(0) - \frac{1653}{80000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta^2 f(0) = \frac{1}{100}\Delta^2 f(0) - \frac{9}{1000}\Delta^3 f(0) + \frac{309}{40000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta^3 f(0) = \frac{1}{1000}\Delta^3 f(0) - \frac{27}{20000}\Delta^4 f(0),$$

$$\delta^4 f(0) = \frac{1}{10000}\Delta^4 f(0).$$

Wir haben schon gesehen (Nr. 7), daß die Gleichung

$$\varphi(t) = t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$$

im Intervall $(-2, -1)$ eine Wurzel besitzt. Die Gleichung

$$f(x) = \varphi(-2 + x) = 0$$

hat aber eine Wurzel zwischen 0 und 1.

Nach der angegebenen Methode können die Werte

$$f\left(\frac{1}{10}\right), \quad f\left(\frac{2}{10}\right), \ldots, \quad f\left(\frac{9}{10}\right)$$

berechnet werden.

Wir wollen voraussetzen, daß $f\left(\frac{c_1}{10}\right)$ und $f\left(\frac{c_1+1}{10}\right)$ verschiedene Vorzeichen haben. Dann hat die Gleichung $\varphi(t) = 0$ eine Wurzel im Intervall $\left(-2 + \frac{c_1}{10}, -2 + \frac{c_1+1}{10}\right)$.

Jetzt ist in $\varphi(t)$ die Substitution

$$t = -2 + \frac{c_1 + x}{10}$$

anzuwenden. Wir erhalten eine neue Funktion

$$f_1(x) = \varphi\left(-2 + \frac{c_1 + x}{10}\right),$$

die auch eine Wurzel zwischen 0 und 1 besitzt.

Nach demselben Verfahren findet man zwei Zahlen $\frac{c_2}{10}$ und $\frac{c_2+1}{10}$, für die $f_1\left(\frac{c_2}{10}\right)$ und $f_1\left(\frac{c_2+1}{10}\right)$ verschiedene Vorzeichen haben. Die Wurzel der Gleichung $\varphi(t) = 0$ liegt also im Intervall

$$\left(-2 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2}, \quad -2 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2+1}{10^2}\right).$$

Auf diese Weise kann man die Wurzel der Gleichung mit beliebiger Genauigkeit berechnen.

13. Wir wollen jetzt folgende Aufgabe der Interpolation lösen. Es ist eine ganze Funktion 4ten Grades zu bilden, die für

$$f(a),\ f'(a),\ f(a+h),\ f'(a+h),\ f(a+2h)$$

vorgeschriebene Werte besitzt.

Die Funktion

$$F(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2\cdot h^2}\Delta^2 f(a)$$

hat die Eigenschaften

$$F(a) = f(a),\ F(a+h) = f(a+h),\ F(a+2h) = f(a+2h).$$

Dieselben Eigenschaften bestehen auch für

$$\Phi(x) = F(x) + (x-a)(x-a-h)(x-a-2h)\varphi(x),$$

wie auch die Funktion $\varphi(x)$ gewählt wird.

Aus den Forderungen

$$\Phi'(a) = f'(a), \quad \Phi'(a+h) = f'(a+h)$$

lassen sich die Werte $\varphi(a)$ und $\varphi(a+h)$ berechnen. Deswegen ist die Funktion

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \frac{x-a}{h}\Delta\varphi(a)$$

vollständig bestimmt.

Es sollen z. B. die Bedingungen

$$f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad f(1)=2,\quad f'(1)=3,\quad f(2)=7$$

befriedigt werden. In diesem Falle ist

$$\Delta f(0)=1,\quad \Delta f(1)=5,\quad \Delta^2 f(0)=4,$$

$$F(x) = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2}\cdot 4 = 2x^2 - x + 1,$$

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= 2x^2 - x + 1 + x(x-1)(x-2)\varphi(x)\\ &= 2x^2 - x + 1 + (x^3 - 3x^2 + 2x)\varphi(x),\end{aligned}$$

$$\Phi'(x) = 4x - 1 + (x^3 - 3x^2 + 2x)\varphi'(x) + (3x^2 - 6x + 2)\varphi(x),$$

$$\Phi'(0) = -1 + 2\varphi(0) = 1,\quad \varphi(0) = 1,$$

$$\Phi'(1) = 3 - \varphi(1) = 3,\qquad \varphi(1) = 0,$$

$$\varphi(x) = 1 + x\cdot(-1) = -x + 1,$$

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^2 - x + 1 + (x^3 - 3x^2 + 2x)(-x+1)\\ &= -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 1.\end{aligned}$$

Wir wollen noch ein Beispiel behandeln. Es soll eine ganze Funktion 3ten Grades die Bedingungen erfüllen

$$f(0)=1,\quad f(1)=1,\quad f'(1)=1,\quad f''(1)=4.$$

Nach dem Taylorschen Satze hat die Funktion

$$F(x) = 1 + (x-1) + 4\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2} = 2x^2 - 3x + 2$$

die Eigenschaften

$$F(1)=1,\quad F'(1)=1,\quad F''(1)=4.$$

Dasselbe gilt auch für

$$\Phi(x) = 2x^2 - 3x + 2 + (x-1)^3\varphi(x)$$

bei willkürlicher Wahl von $\varphi(x)$. Da aber nur eine Bedingung zu erfüllen ist, so können wir $\varphi(x)$ konstant voraussetzen. Es soll $\Phi(0)=1$ sein, folglich ist

$$2 - \varphi(0) = 1,\quad \varphi(0) = 1$$

und

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2 + (x-1)^3 = x^3 - x^2 + 1.$$

Dieselbe Aufgabe könnte man in andrer Weise lösen.

Den Bedingungen $f(0) = 1$, $f(1) = 1$ genügt die Funktion

$$\Phi(x) = 1 + x(x-1)\varphi(x) = 1 + (x^2 - x)\varphi(x).$$

Die Ableitungen dieser Funktion

$$\Phi'(x) = (x^2 - x)\varphi'(x) + (2x-1)\varphi(x),$$
$$\Phi''(x) = (x^2 - x)\varphi''(x) + 2(2x-1)\varphi'(x) + 2\varphi(x)$$

haben für $x = 1$ die Werte

$$\Phi'(1) = \varphi(1) = 1, \quad \Phi''(1) = 2\varphi'(1) + 2\varphi(1) = 4.$$

Daraus folgt

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi'(1) = 1,$$
$$\varphi(x) = 1 + (x-1) = x,$$
$$f(x) = 1 + (x^2 - x)x = x^3 - x^2 + 1.$$

Ganz ähnlich kann man ganze Funktionen höheren Grades bilden, die vorgeschriebene Werte

$$\begin{array}{llll} f(a), & f'(a), & f''(a), \ldots, f^{(\alpha-1)}(a), \\ f(a+h), & f'(a+h), & f''(a+h), \ldots, f^{(\alpha_1-1)}(a+h), \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f(a+mh), & f'(a+mh), & f''(a+mh), \ldots, f^{(\alpha_m-1)}(a+mh) \end{array}$$

besitzen. Der Grad dieser Funktion kann nicht die Zahl

$$\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m - 1$$

übersteigen. (Vgl. Markoff, Differenzenrechnung, S. 1—6.)

In den betrachteten Fällen der Interpolation wurde vorausgesetzt, daß die Werte der unabhängigen Variabeln in äquidistanten Intervallen auftreten, weil nur in diesem Falle die Differenzen anzuwenden sind.

14. Angenäherte Interpolation. Für Werte von t, die in einem Intervall liegen, wollen wir die gegebene Funktion $f(t)$ angenähert durch die ganze Funktion $F(t)$ ausdrücken, die gewissen Forderungen genügt. Der Fehler dieser Annäherung soll abgeschätzt werden.

Z. B. soll die ganze Funktion $F(t)$ vom nicht höheren als n^{ten} Grade sein und die Gleichung

$$f(t) = F(t)$$

erfüllen für

$$t = a, \quad a+h, \quad a+2h, \ldots, a+nh.$$

Es ist uns schon bekannt, wie man eine solche ganze Funktion bildet (Nr. 10).

Es sei x eine Zahl, die im gegebenen Intervalle liegt. Wir werden näherungsweise

$$f(x) = F(x)$$

setzen und es ist der Fehler dieser Annäherung abzuschätzen.

Die Funktion

$$f(t) - F(t) - K \cdot \frac{(t-a)(t-a-h)\ldots(t-a-nh)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}$$

bei beliebigem Werte von K verschwindet für

$$t = a, \quad a+h, \quad a+2h, \ldots, a+nh.$$

Wir wollen K so wählen, daß diese Funktion noch für $t = x$ verschwindet. Hier ist x eine Zahl, die von a, $a+h$, $a+2h, \ldots,$ $a+nh$ verschieden ist.

Die Gleichung

$$\Phi(t) = f(t) - F(t) - K\frac{(t-a)(t-a-h)\ldots(t-a-nh)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)} = 0$$

hat dann mindestens $n+2$ Wurzeln. Nach dem Rolleschen Satz hat die $(n+1)^{\text{te}}$ Ableitung von $\Phi(t)$ mindestens eine Wurzel, die wir mit ξ bezeichnen wollen. Diese Zahl ist eine mittlere zwischen der größten und der kleinsten unter den Zahlen a, $a+nh$ und x.

Es ist aber

$$\Phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K;$$

folglich ist

$$K = f^{(n+1)}(\xi).$$

Es besteht also die Formel

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2\cdot h^2}\Delta^2 f(a) + \cdots$$

$$+\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-\overline{n-1}h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot h^n}\Delta^n f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-nh)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)} f^{n+1)}(\xi).$$

Das ist die **Newtonsche Interpolationsformel mit dem Restgliede von A. Cauchy** (vgl. Cauchy, Oeuvres, 1 série, tome 5, p. 422 oder Comptes rendus, tome 11 [1840], p. 787).

Besonders sind die Fälle zu bemerken

$$n = 0, \quad f(x) = f(a) + (x-a)f'(\xi),$$

$$n = 1, \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2} f''(\xi),$$

$$n = 2, \quad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta f(a) + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2\cdot h^2}\Delta^2 f(a)$$

$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(\xi).$$

Die erste dieser Formeln ist die **Lagrangesche**.

Durch Weglassung der Restglieder entstehen Näherungsformeln, deren Fehler durch die Restglieder ausgedrückt sind.

15. Wir wollen einen besonderen Fall der Interpolation betrachten. Für $t = x$ soll die gegebene Funktion $f(t)$ angenähert durch eine solche ganze Funktion 3ten Grades $F(t)$ dargestellt werden, daß die Bedingungen

$$F(-1) = f(-1), \quad F(0) = f(0), \quad F'(0) = f'(0), \quad F(1) = f(1)$$

erfüllt seien.

Die Funktion $F(t)$ hat die Form

$$F(t) = f(-1) + \frac{t+1}{1}\Delta f(-1) + \frac{(t+1)t}{1\cdot 2}\Delta^2 f(-1) + \frac{(t+1)t(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3}A,$$

wo die Konstante A sich aus der Bedingung

$$F'(0) = f'(0)$$

bestimmen läßt. Wir finden

$$F'(t) = \Delta f(-1) + \frac{1}{2}(2t+1)\Delta^2 f(-1) + \frac{1}{6}(3t^2 - 1)A,$$

$$f'(0) = \Delta f(-1) + \frac{1}{2}\Delta^2 f(-1) - \frac{1}{6}A,$$

$$A = 6\Delta f(-1) + 3\Delta^2 f(-1) - 6f'(0),$$

$$A = 6[f(0) - f(-1)] + 3[f(1) - 2f(0) + f(-1)] - 6f'(0).$$

Nach Reduktionen ergibt sich

$$A = 3f(1) - 3f(-1) - 6f'(0).$$

Um die Interpolationsformel mit dem Restgliede zu finden, betrachten wir die Funktion

$$\Phi(t) = f(t) - F(t) - K\frac{(t+1)t^2(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},$$

wo die Konstante K so gewählt ist, daß $\Phi(x)$ gleich Null ist.

Wenn wir die vier Zahlen

$$-1, \quad 0, \quad 1, \quad x$$

der Größe nach ordnen, so entstehen solche vier Zahlen

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4,$$

die den Bedingungen genügen

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4.$$

Diese Zahlen genügen der Gleichung $\Phi(t) = 0$. Nach dem Rolleschen Satze hat die Gleichung $\Phi'(t) = 0$ mindestens drei solche Wurzeln b_1, b_2, b_3, daß

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < a_3 < b_3 < a_4.$$

Keine der Zahlen b_1, b_2 und b_3 ist also gleich Null. Außerdem ist diese Gleichung noch für $t = 0$ befriedigt. Die Gleichung $\Phi'(t) = 0$ hat also mindestens vier verschiedene Wurzeln. Nach dem Rolleschen Satze hat die dritte Ableitung von $\Phi'(t)$ oder $\Phi^{IV}(t)$ mindestens eine Wurzel $t = \xi$, die zwischen a_1 und a_4 liegt. Da aber

$$\Phi^{IV}(t) = f^{IV}(t) - K$$

ist, so ist

$$K = f^{IV}(\xi).$$

Wir haben also die folgende Formel bewiesen

$$f(x) = f(-1) + \frac{x+1}{1}\Delta f(-1) + \frac{(x+1)x}{1\cdot 2}\Delta^2 f(-1) + A\,\frac{(x+1)x(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$+ \frac{(x+1)x^2(x-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} f^{IV}(\xi).$$

Der Koeffizient A hat den angegebenen Wert.

16. In andern Fällen werden die Restglieder mit Hilfe derselben Betrachtungen gebildet.

Wenn z. B. die Näherungsformel

$$f(t) = F(t)$$

genau ist für

$$t = a, \quad a+h, \quad a+2h, \quad a+3h,$$
$$f'(t) = F'(t) \quad \text{für} \quad t = a, \quad a+h, \quad a+2h,$$
$$f''(t) = F''(t) \quad \text{für} \quad t = a,$$

dann ist $F(t)$ eine ganze Funktion vom 7ten Grade und die Näherungsformel $f(x) = F(x)$ enthält den Fehler

$$\frac{(x-a)^3(x-a-h)^2(x-a-2h)^2(x-a-3h)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} f^{(8)}(\xi).$$

Die Zahl ξ ist zwischen der größten und der kleinsten unter den Zahlen a, $a + 3h$, x enthalten. (Vgl. Markoff, Differenzenrechnung, S. 6—8.)

17. Anwendung der angenäherten Interpolation auf die Berechnung der Wurzeln numerischer Gleichungen. Wir machen die Voraussetzung, daß die numerische Gleichung $f(t) = 0$ im Intervall (a, b) nur eine Wurzel besitzt und daß $f''(t)$ immer dasselbe Vorzeichen in diesem Intervall behält.

Da die Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$ verschieden sind, so ist

$$f(a)\cdot f(b) < 0.$$

Wir werden $f(t)$ näherungsweise durch eine solche lineare Funktion $F(t)$ ausdrücken, für die

$$F(a) = f(a) \text{ und } F(b) = f(b).$$

Hier ist $h = b - a$ und deswegen ist

$$F(t) = f(a) + \frac{t-a}{b-a}[f(b) - f(a)].$$

Für $t = x$ wird

$$f(x) = F(x) + \frac{(x-a)(x-b)}{1 \cdot 2} f''(\xi).$$

Den Wert x wählen wir so, daß $F(x) = 0$ wird. Folglich ist

$$x - a = \frac{(b-a)f(a)}{f(a)-f(b)}, \quad x - b = \frac{(b-a)f(b)}{f(a)-f(b)}, \quad x = \frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)},$$

$$(x-a)(x-b) = \frac{(b-a)^2 f(a) \cdot f(b)}{[f(a)-f(b)]^2} < 0.$$

Es liegt also x zwischen a und b. Für diesen x kann nicht $f''(\xi) = 0$ sein. Die Gleichung

$$\Phi(t) = f(t) - F(t) = 0$$

wäre dann befriedigt für $t = a$, x und b. Nach dem Rolleschen Satze hätte die Gleichung $\Phi'(t) = 0$ mindestens zwei Wurzeln zwischen a und b, und die Funktion

$$\Phi''(t) = f''(t)$$

müßte in diesem Intervall ihr Vorzeichen wechseln, was gegen die Voraussetzung ist.

Weil $F(x) = 0$ ist, so ist

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{1 \cdot 2} f''(\xi).$$

Der betrachtete Wert von x läßt sich einfach durch Determinanten ausdrücken. Es ist

$$x = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ a & b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Wenn t im Intervall (a, b) liegt und

$$f(a)f''(t) > 0$$

ist, so ist $f(a)f''(\xi) > 0$ und folglich

$$f(a)f(x) < 0,$$

da $(x-a)(x-b)$ negativ ist. Die Wurzel der Gleichung $f(t) = 0$ liegt also zwischen a und x.

Wenn wir a und b als erste Annäherungen der Wurzel betrachten, so sind

$$a_1 = a, \quad b_1 = \frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)}$$

zweite Annäherungen.

Es sei

$$f(a)f''(t) < 0, \quad \text{oder} \quad f(b)f''(t) > 0,$$

für Werte von t, die im Intervall (a, b) liegen.

Dann ist

$$f(b)f''(\xi) > 0 \quad \text{und} \quad f(b)f(x) < 0.$$

Die Wurzel von $f(t) = 0$ liegt zwischen b und x. Die zweiten Annäherungen sind in diesem Falle

$$a_1 = \frac{b f(a) - a f(b)}{f(a) - f(b)}, \quad b_1 = b.$$

In derselben Weise kann man von a_1 und b_1 zu den folgenden Annäherungen a_2 und b_2 übergehen usw. (Vgl. Weber, Lehrbuch der Algebra, I, § 116.)

18. Anwendung der angenäherten Interpolation auf die Berechnung der Logarithmen und Antilogarithmen. Wir nehmen z. B. eine Tabelle fünfstelliger gewöhnlicher Logarithmen aller ganzen Zahlen von 1000 bis einschließlich 9999. Mit Hilfe der Werte $\log N$ und $\log(N + 1)$ soll $\log(N + x)$ berechnet werden, wobei $0 < x < 1$ ist.

Die Interpolationsformel

$$f(x) = f(0) + x\,\Delta f(0) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} f''(\xi)$$

gibt die Näherungsformel

$$\log(N + x) = \log N + x\,[\log(N + x) - \log N]$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon = \frac{x(1-x)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\log e}{(N + \xi)^2}.$$

Es ist

$$x(1 - x) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \leqq \frac{1}{4},$$

$$e < 3 < \sqrt{10}, \quad \log e < \frac{1}{2},$$

$$N + \xi > 10^3.$$

Daraus folgt

$$\varepsilon < \frac{1}{16 \cdot 10^6} \quad \text{oder} \quad \varepsilon < 7 \cdot 10^{-8}.$$

Dieser Fehler hat keinen Einfluß auf die fünfstelligen Logarithmen.

19. Die Berechnung der Antilogarithmen führt auf die Frage: Es sind die Werte gegeben:

$$\log N = a, \quad \log(N + 1) = b.$$

Aus der Gleichung

$$\log(N + y) = a + x$$

soll y berechnet werden für einen Wert von x, der zwischen 0 und $b - a$ liegt.

Wir setzen
$$f(x) = N + y = 10^{a+x}.$$

Die Anwendung der Interpolationsformel
$$f(x) = f(0) + \frac{x}{b-a} \Delta f(0) + \frac{x(x-b+a)}{1 \cdot 2} f''(\xi)$$
gibt die Näherung
$$y = \frac{x}{b-a}$$
mit dem negativen Fehler
$$\varepsilon = -\frac{x(b-a-x)}{2} \cdot 10^{a+\xi} (l\,10)^2.*$$

Es ist
$$x(b-a-x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2} - x\right)^2 \leqq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Aus der Relation
$$e^{l\,10} = 10$$
folgt
$$l\,10 = \frac{1}{\log e}.$$

Da aber $10^{a+\xi} < 10^b$ ist, so ist
$$-\varepsilon < \frac{1}{2} \cdot 10^b \cdot (\log e)^{-2} \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

Wenn wir bemerken, daß
$$10^b = N + 1, \quad b - a = \log(N+1) - \log N = \log\left(1 + \frac{1}{N}\right),$$
so finden wir
$$-\varepsilon < \frac{1}{8}(N+1) \cdot (\log e)^{-2} \left[\log\left(1 + \frac{1}{N}\right)\right]^2.$$

Dieser Ausdruck kann noch vereinfacht werden.

Für positive z ist
$$\varphi(z) = \log(1+z) - z \log e < 0,$$
weil $\varphi(0) = 0$ und
$$\varphi'(z) = \frac{\log e}{1+z} - \log e < 0$$
sind. Deswegen ist
$$\log\left(1 + \frac{1}{N}\right) < \frac{1}{N} \log e$$
und folglich
$$-\varepsilon < \frac{N+1}{8N^2}.$$

Da aber $N + 1 \leqq 10^4$, $N \geqq 10^3$, so ist die positive Zahl
$$-\varepsilon < 2 \cdot 10^{-3}.$$

In diesem Kapitel ist die Interpolation nur als Anwendung der Differenzenrechnung behandelt worden. Ausführliche Mitteilungen über diesen Gegenstand findet man im Referat von J. Bauschinger (Encykl. der Math. Wiss., I, S. 799—820).

* $l\,10$ ist der natürliche Logarithmus von 10.

Drittes Kapitel.

Angenäherte Berechnung bestimmter Integrale.

20. Einleitende Bemerkungen. Um das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, wo $a < b$ ist, angenähert zu berechnen, gebraucht man eine der Interpolationsformeln (Nr. 14—16)

$$f(x) = F(x) + \varphi(x) f^{(p)}(\xi).$$

Hier sind $F(x)$ und $\varphi(x)$ rationale ganze Funktionen und ξ ein Mittelwert.

Nach Integration findet man die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b F(x)\,dx$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon = \int_a^b \varphi(x) f^{(p)}(\xi)\,dx.$$

Es ist ξ eine unbekannte Funktion von x; wir wissen nur, daß für $a < x < b$ auch $a < \xi < b$ ist. Der Fehler der Näherungsformel ist nur dann abzuschätzen, wenn die Funktion $\varphi(x)$ für alle x zwischen a und b ihr Vorzeichen behält. Nach einem Satze der Integralrechnung ist dann

$$\varepsilon = f^{(p)}(\eta) \int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

wo $a < \eta < b$ ist.

Die Aufgabe ist also auf die Integration ganzer rationaler Funktionen zurückgeführt. Die Rechnungen sind noch einfacher, wenn die Grenzen des bestimmten Integrals -1 und $+1$ sind, z. B.

$$\int_{-1}^{1} (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4)\,dx = 2p_0 + \frac{2}{3} p_2 + \frac{2}{5} p_4.$$

Um die Grenzen des gegebenen Integrals in -1 und $+1$ zu verwandeln, setzen wir

$$x = \psi(t)$$

und es sollen die Bedingungen erfüllt werden

$$\psi(-1) = a, \quad \psi(1) = b.$$

Nach der Newtonschen Interpolationsformel ist

$$x = a + \frac{t+1}{2}(b-a) = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}.$$

Vermöge dieser Substitution findet man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \mathfrak{F}(t)\,dt.$$

In den folgenden Paragraphen werden wir verschiedene Interpolationsformeln anwenden. Daraus entstehen verschiedene Methoden zur Berechnung des gegebenen Integrals.

21. Methode der Rechtecke. In der Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \mathfrak{F}(t)\,dt,$$

wo

$$f\left[\frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}\right] = \mathfrak{F}(t),$$

setzen wir (Nr. 14)

$$\mathfrak{F}(t) = \mathfrak{F}(-1) + (t+1)\mathfrak{F}'(t_1), \quad (-1 < t_1 < t).$$

Daraus entsteht die Näherungsformel

$$\int_{-1}^{1} \mathfrak{F}(t)\,dt = 2\mathfrak{F}(-1)$$

mit dem Fehler

$$\int_{-1}^{1}(t+1)\mathfrak{F}'(t_1)\,dt = \mathfrak{F}'(\tau)\int_{-1}^{1}(t+1)\,dt = 2\mathfrak{F}'(\tau).$$

Hier ist $-1 < \tau < 1$.

Um die Funktion $f(x)$ einzuführen, bemerken wir, daß

$$\mathfrak{F}'(t) = f'(x)\cdot\frac{b-a}{2}.$$

Wir finden die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(a)$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(b-a)^2\cdot f'(\xi),$$

wo $a < \xi < b$ ist.

Geometrisch ist das gegebene Integral eine Fläche, die in der Näherungsformel durch ein Rechteck ersetzt wird. Daher rührt der Name der Methode.

Um den Fehler zu vermindern, zerlegen wir das Intervall (a, b) in n gleiche Intervalle. Das Integral verwandelt sich in die Summe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a+\frac{b-a}{n}} f(x)\,dx + \int_{a+\frac{b-a}{n}}^{a+2\frac{b-a}{n}} f(x)\,dx + \cdots + \int_{a+\overline{n-1}\frac{b-a}{n}}^{b} f(x)\,dx.$$

Nachdem wir auf jeden Summanden die Näherungsformel angewandt haben, finden wir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}),$$

wo der Kürze wegen die Bezeichnung

$$y_k = f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$$

eingeführt ist.

Der Fehler dieser Näherungsformel ist

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{(b-a)^2}{n^2}[f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \cdots + f'(\xi_n)],$$

wo $a + (k-1)\frac{b-a}{n} < \xi_k < a + k\frac{b-a}{n}$ ist.

Diesen Ausdruck kann man vereinfachen.

Es wird vorausgesetzt, daß $f'(x)$ endlich und stetig im Intervall (a, b) ist. Diese Funktion hat dann eine obere Grenze A und eine untere Grenze B.*

Aus der Reihe von Ungleichheiten

$$A \geqq f'(\xi_1) \geqq B, \quad A \geqq f'(\xi_2) \geqq B, \ldots, A \geqq f'(\xi_n) \geqq B$$

folgt

$$nA \geqq f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \cdots + f'(\xi_n) \geqq nB$$

und

$$A \geqq \frac{f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \cdots + f'(\xi_n)}{n} \geqq B.$$

Nach einem Satze von Weierstraß kann $f'(x)$ jeden Wert zwischen A und B annehmen. Deswegen gibt es eine solche Zahl ξ, wofür

$$\frac{f'(\xi_1) + f'(\xi_2) + \cdots + f'(\xi_n)}{n} = f'(\xi).$$

Es ist also

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n} \cdot f'(\xi).$$

Wenn wir die Interpolationsformel

$$F(t) = F(1) + (t-1)F'(t_1)$$

benutzen und dieselben Rechnungen wiederholen, so finden wir die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{2}\frac{(b-a)^2}{n} f'(\xi).$$

* Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, p. 101 et 126.

Wenn $f'(x)$ immer dasselbe Vorzeichen im Intervall (a, b) hat, so ist der Wert von $\int\limits_a^b f(x)dx$ zwischen

$$\frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$

und

$$\frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n)$$

enthalten, weil ε und ε_1 verschiedene Vorzeichen haben.

22. Um das Integral

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int\limits_{-1}^{1} F(t)dt$$

zu berechnen, kann man nicht die Formel

$$F(t) = F(0) + tF'(t_1)$$

gebrauchen, weil t, der Faktor bei $F'(t_1)$, das Vorzeichen im Intervall $(-1, 1)$ wechselt und der Fehler der Näherungsformel nicht abgeschätzt werden kann. Es ist zu setzen („Markoff", S. 53)

$$F(t) = F(0) + tF'(0) + \frac{t^2}{2}F''(t_1)$$

und man findet

$$\int\limits_{-1}^{1} F(t)dt = 2F(0) + \frac{1}{3}F''(\tau).$$

Daraus folgt die Näherungsformel

$$\int\limits_a^b f(x) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

mit dem Fehler

$$\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi) = \frac{1}{2}\,\frac{(b-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{f''(\xi)}{1\cdot 2}.$$

Um eine genauere Formel zu bekommen, zerlegt man das Intervall (a, b) in n gleiche Intervalle. Wenn man dieselbe Methode wie in Nr. 21 benutzt, so findet man die Näherungsformel

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \cdots + y_{\frac{2n-1}{2}}\right)$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon = \frac{1}{2n^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{f''(\xi)}{1\cdot 2}.$$

Hier ist wieder

$$y_k = f\left(a + k\cdot\frac{b-a}{n}\right).$$

23. Methode der Trapeze. Zur Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} F(t)\,dt$$

werden wir die Funktion $F(t)$ angenähert durch eine lineare Funktion $\Phi(t)$ ausdrücken, die den Bedingungen genügt

$$\Phi(-1) = F(-1), \quad \Phi(1) = F(1).$$

Dadurch entsteht die Interpolationsformel

$$F(t) = F(-1) + \frac{t+1}{2}[F(1) - F(-1)] + \frac{(t+1)(t-1)}{1\cdot 2} F''(t_1).$$

Die Anwendung derselben gibt

$$\int_{-1}^{1} F(t)\,dt = F(-1) + F(1) - \frac{2}{3} F''(\tau).$$

Daraus folgt die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

mit dem Fehler

$$-\frac{(b-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{f''(\xi)}{1\cdot 2}.$$

Die rechte Seite der Näherungsformel ist der Flächeninhalt eines Trapezes.

Nach Zerlegung des Integrals in n Summanden findet man die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}[(y_0 + y_1) + (y_1 + y_2) + \cdots + (y_{n-1} + y_n)],$$

oder

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(b-a)^3}{1\cdot 2\cdot 2}\cdot\frac{f''(\xi)}{1\cdot 2}.$$

Wenn $f''(x)$ dasselbe Vorzeichen hat für alle x zwischen a und b, so haben ε_1 und ε (in Nr. 22) verschiedene Vorzeichen. Deswegen ist das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ zwischen

$$\frac{b-a}{n}\left(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+y_{\frac{5}{2}}+\cdots+y_{\frac{2n-1}{2}}\right)$$

und

$$\frac{b-a}{2n}\left(y_0+2y_1+2y_2+\cdots+2y_{n-1}+y_n\right)$$

enthalten.

24. Simpsonsche Formel. Wenn wir die Interpolationsformel (Nr. 15)

$$\mathcal{F}(t)=\mathcal{F}(-1)+\frac{t+1}{1}\Delta\mathcal{F}(-1)+\frac{(t+1)t}{1\cdot 2}\Delta^2\mathcal{F}(-1)$$
$$+A\frac{(t+1)t(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{(t+1)t^2(t-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\mathcal{F}^{\mathrm{IV}}(t_1)$$

anwenden, so wird

$$\int_{-1}^{1}\mathcal{F}(t)\,dt=2\mathcal{F}(-1)+2\Delta\mathcal{F}(-1)+\frac{1}{3}\Delta^2\mathcal{F}(-1)-\frac{1}{90}\mathcal{F}^{\mathrm{IV}}(\tau).$$

Es ist aber

$$\Delta\mathcal{F}(-1)=\mathcal{F}(0)-\mathcal{F}(-1),\quad \Delta^2\mathcal{F}(-1)=\mathcal{F}(1)-2\mathcal{F}(0)+\mathcal{F}(-1),$$
$$\mathcal{F}^{\mathrm{IV}}(t)=f^{\mathrm{IV}}(x)\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^4.$$

Nach einigen Reduktionen finden wir die Simpsonsche Formel

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

mit dem Fehler

$$-\frac{(b-a)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{f^{\mathrm{IV}}(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Wenn $f(x)$ eine ganze Funktion vom 3ten oder niedrigeren Grade ist, so ist das Restglied gleich Null und die Simpsonsche Formel ist ganz genau. Z. B.:

$$\int_0^1(2x+3)(2x-1)(2x+5)\,dx=\frac{1}{6}[-3\cdot 5+5\cdot 7]=\frac{15}{3}.$$

Wenn aber $f(x)$ eine andre Funktion ist, so kann man den Fehler verkleinern, nachdem man das gegebene Integral in n Summanden zerlegt hat. Man findet dann die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6n}\left(y_0+4y_{\frac{1}{2}}+2y_1+4y_{\frac{3}{2}}+\cdots+4y_{\frac{2n-1}{2}}+y_n\right)$$

mit dem Fehler

$$\varepsilon=-\frac{1}{n^4}\cdot\frac{(b-a)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{f^{\mathrm{IV}}(\xi)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

In diesem Kapitel haben wir mit geringen Änderungen die Darstellung vom Herrn A. A. Markoff angegeben. (Differenzenrechnung, S. 50—60.)

Wir schließen damit die Anwendungen der Sätze über Differenzen und gehen zu den Summen über.

Zweiter Teil.

Summen.

Erstes Kapitel.

Unbestimmte und bestimmte Summen.

25. Definitionen. Unter Summe von $f(x)$ versteht man eine Funktion $\varphi(x)$, deren Differenz gleich $f(x)$ ist, also

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=f(x).$$

Diese Gleichung bedeutet, daß der Ausdruck $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ so transformiert werden kann, daß er in $f(x)$ übergeht. Dieselbe Relation wird auch bezeichnet durch

$$\varphi(x)=\Sigma f(x).$$

Es ist vorausgesetzt, daß $f(x)$ nicht in der Form $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ gegeben ist. Sonst wäre

$$\varphi(x)=\Sigma[\varphi(x+h)-\varphi(x)]$$

eine reine Identität, die keinen Nutzen haben könnte.

Wir werden untersuchen, ob es möglich ist, daß eine andre Funktion $\psi(x)$ dieselbe Eigenschaft

$$\psi(x+h)-\psi(x)=f(x)$$

hat. Wenn wir $\psi(x)-\varphi(x)$ mit $F(x)$ bezeichnen, so ist

$$\psi(x)=\varphi(x)+F(x)$$

und nach Nr. 3

$$\Delta\psi(x)=\Delta\varphi(x)+\Delta F(x).$$

Es ist also

$$\Delta F(x)=0 \quad \text{oder} \quad F(x+h)=F(x).$$

Beide Funktionen $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ unterscheiden sich also um eine periodische Funktion mit der Periode h.

Ist $\Phi(x)$ eine beliebige Funktion, für die

$$\Phi(x+h)=\Phi(x) \quad \text{oder} \quad \Delta\Phi(x)=0,$$

so ist

$$\Delta[\varphi(x)+\Phi(x)]=\Delta\varphi(x)+\Delta\Phi(x)=f(x).$$

Also haben alle Funktionen, deren Differenz gleich $f(x)$ ist, die Form

$$\varphi(x) + \Phi(x),$$

wo $\Phi(x)$ eine willkürliche periodische Funktion mit der Periode h ist.

Um die Aufgabe zu vereinfachen, werden wir von nun an voraussetzen, daß x nur Werte der Reihe

$$a, \quad a+h, \quad a+2h, \ldots$$

annimmt. Dann ist $\Phi(x)$ eine willkürliche Konstante, die wir mit C bezeichnen werden. Es ist also

$$\Sigma f(x) = \varphi(x) + C.$$

Dieser Ausdruck heißt unbestimmte Summe, weil der Wert von C ganz beliebig ist.

26. Summation einfacher Funktionen. Aus jedem Satz über die Differenz (Nr. 2—6) können wir einen Satz über die Summe herleiten.

Aus der Relation $\Delta x = h$ folgt $\Delta \frac{x}{h} = 1$ und

$$\Sigma 1 = \frac{x}{h} + C.$$

Weil

$$\Delta x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}h) = nhx(x-h)\ldots(x-\overline{n-2}h)$$

ist, so ist

$$\Delta \frac{1}{nh} x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}h) = x(x-h)\ldots(x-\overline{n-2}h)$$

und

$$\Sigma x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-2}h) = \frac{1}{nh} x(x-h)\ldots(x-\overline{n-1}h) + C.$$

Damit man unter dem Summenzeichen n Faktoren hat, ist es zweckmäßig, n durch $n+1$ zu ersetzen. Man findet

$$\Sigma x(x-h)(x-2h)\ldots(x-\overline{n-1}h) = \frac{1}{(n+1)h} x(x-h)\ldots(x-nh) + C.$$

Wir hatten die Formel (Nr. 2)

$$\frac{1}{x(x+h)\ldots(x+\overline{n-1}h)} = -nh \cdot \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+nh)}.$$

Im Nenner der rechten Seite sind mindestens zwei Faktoren, weil $n \geqq 1$ ist.

Aus dieser Formel folgt

$$\Sigma \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+nh)} = -\frac{1}{nh} \cdot \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+\overline{n-1}h)} + C.$$

Die Funktion unter dem Summenzeichen hat im Nenner mindestens zwei Faktoren.

Wenn wir $n-1$ statt n einsetzen, so entsteht die Formel

$$\Sigma \frac{1}{x(x+h)\dots(x+\overline{n-1}h)} = -\frac{1}{(n-1)h}\cdot\frac{1}{x(x+h)\dots(x+\overline{n-2}h)} + C.$$

Hier ist $n > 1$. Dem Wert $n = 1$ entspricht eine besondere transzendente Funktion, die wir mit $\Sigma\frac{1}{x}$ bezeichnen.

Die Relation

$$\Delta m^x = m^x(m^h - 1) \quad \text{oder} \quad \Delta\frac{m^x}{m^h-1} = m^x$$

gibt die Formel

$$\Sigma m^x = \frac{m^x}{m^h - 1} + C.$$

Es ist, wie wir wissen (Nr. 6),

$$\Delta \cos u = -2\sin\frac{\Delta u}{2}\sin\left(u + \frac{\Delta u}{2}\right).$$

Wir setzen

$$u = \alpha x + \beta$$

und wählen α und β so, daß

$$u + \frac{\Delta u}{2} = x$$

wird. Aus der Bedingungsgleichung

$$\alpha x + \beta + \frac{\alpha h}{2} = x$$

folgt

$$\alpha = 1, \quad \beta = -\frac{h}{2}.$$

Deswegen ist

$$\Delta\cos\left(x - \frac{h}{2}\right) = -2\sin\frac{h}{2}\cdot\sin x.$$

Daraus folgt

$$\Delta\left[-\frac{\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}\right] = \sin x$$

und

$$\Sigma\sin x = -\frac{\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}} + C.$$

Ganz analog findet man die Formel

$$\Sigma\cos x = \frac{\sin\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}} + C.$$

27. Summation zusammengesetzter Funktionen. Wenn A ein konstanter Faktor ist, so ist

$$\Delta A\varphi(x) = A\Delta\varphi(x)$$

oder

$$\Sigma[A\Delta\varphi(x)] = A\varphi(x) + C.$$

Wenn wir $\Delta\varphi(x)$ mit $f(x)$ bezeichnen, so entsteht die Formel

$$\Sigma A f(x) = A\,\Sigma f(x).$$

Die Konstante C ist schon im Ausdrucke $\Sigma f(x)$ enthalten. Wenn wir eine Reihe von Gleichungen haben

$$\Delta\varphi_1(x) = f_1(x),\quad \Delta\varphi_2(x) = f_2(x),\ldots,\quad \Delta\varphi_m(x) = f_m(x),$$

so ist

$$\Delta[\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_m(x)] = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x).$$

Daraus folgt

$$\Sigma[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)] = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_m(x) + C$$

oder

$$\Sigma[f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_m(x)] = \Sigma f_1(x) + \Sigma f_2(x) + \cdots + \Sigma f_m(x).$$

Mit Hilfe dieser Formel ist es leicht, ganze rationale Funktionen zu summieren.

Es sei

$$f(x) = A_0 + A_1\frac{x-a}{1} + A_2\frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2} + \cdots$$
$$+ A_n\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)\ldots(x-a-\overline{n-1}\,h)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

Dann ist

$$\Sigma f(x) = C + A_0\frac{x-a}{h} + A_1\frac{(x-a)(x-a-h)}{1\cdot 2\cdot h} + A_2\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1\cdot 2\cdot 3h}$$
$$+\cdots + A_n\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-nh)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)\cdot h}.$$

Die Summe einer ganzen Funktion n^{ten} Grades ist also eine ganze Funktion vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade.

Für $h = 1$ ist z. B.

$$x^2 = x + x(x-1),\quad x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2)$$

und folglich

$$\Sigma x^2 = C + \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-2),$$

$$\Sigma x^3 = C + \frac{1}{2}x(x-1) + x(x-1)(x-2) + \frac{1}{4}x(x-1)(x-2)(x-3).$$

Es ist auch leicht, gebrochene Funktionen von der Form

$$\frac{f(x)}{(x+a)(x+a+h)\ldots(x+a+nh)}$$

zu summieren, wo $f(x)$ eine ganze Funktion ist.

28. Partielle Summation. Aus der Formel

$$\Delta[\varphi(x)\cdot\psi(x)] = \varphi(x)\cdot\Delta\psi(x) + \varphi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x)$$

folgt

$$\Sigma[\varphi(x)\cdot\Delta\varphi(x) + \psi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x)] = \varphi(x)\cdot\psi(x) + C$$

oder

$$\Sigma\varphi(x)\cdot\Delta\psi(x) + \Sigma\varphi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x) = \varphi(x)\cdot\psi(x) + C.$$

Diese Gleichung liefert die **Formel der partiellen Summation**

$$\Sigma\varphi(x)\cdot\Delta\psi(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)-\Sigma\psi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x).$$

Die willkürliche Konstante erscheint, nachdem die Summation auf der rechten Seite ausgeführt ist. Mit Hilfe dieser Formel kann man das Produkt $\varphi(x)\cdot f(x)$ summieren, wenn man einen Wert von $\Sigma f(x)$ kennt, und wenn die Operation $\Sigma\psi(x+h)\cdot\Delta\varphi(x)$ ausführbar ist, wo $\psi(x)=\Sigma f(x)$ ist.

Wir wollen z. B. $\Sigma 3^x\cdot x$ für $h=1$ ausrechnen.

Da ein Wert von $\Sigma 3^x$ gleich $\frac{1}{2}3^x$ ist, so ist

$$\Sigma 3^x\cdot x=\Sigma x\cdot\Delta\left(\frac{1}{2}\cdot 3^x\right)=x\cdot\frac{1}{2}\cdot 3^x-\Sigma\frac{1}{2}\cdot 3^{x+1}\cdot\Delta x$$

$$=\frac{1}{2}x\cdot 3^x-\frac{3}{2}\Sigma 3^x=\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)3^x+C.$$

Es wäre nicht zweckmäßig, die Summation beim Faktor x anzufangen. Da $\Sigma x=\frac{x(x-1)}{2}$ ist, so wäre dann

$$\Sigma 3^x\cdot x=\Sigma 3^x\cdot\Delta\frac{x(x-1)}{2}=3^x\cdot\frac{x(x-1)}{2}-\Sigma\frac{(x+1)x}{2}\Delta 3^x$$

$$=\frac{1}{2}3^x x(x-1)-\Sigma(x+1)x\cdot 3^x,$$

und die gegebene Summe würde auf eine kompliziertere zurückgeführt.

Noch ein Beispiel:

$$\Sigma x\sin x=\Sigma x\cdot\Delta\left[\frac{-\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}\right]=x\cdot\frac{-\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}$$

$$-\Sigma\frac{-\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}}\Delta x=-\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}x\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)+\frac{h}{\left(2\sin\frac{h}{2}\right)^2}\cdot\sin x+C.$$

29. Eigenschaften der bestimmten Summen. Wir haben schon gesehen (Nr. 25), daß, wenn

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=f(x),\qquad \psi(x+h)-\psi(x)=f(x)$$

und x eine Zahl der Reihe

$$a,\quad a+h,\quad a+2h,\ldots$$

ist, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sich durch eine Konstante unterscheiden

$$\varphi(x)=\psi(x)+C.$$

Subtrahiert man voneinander zwei Werte dieser Funktionen für $x = a + nh$ und $x = a + mh$, so fällt C weg. Man findet die Gleichung

$$\varphi(a + nh) - \varphi(a + mh) = \psi(a + nh) - \psi(a + mh).$$

Der Ausdruck $\varphi(a + nh) - \varphi(a + mh)$ bleibt also ungeändert, wenn man $\varphi(x)$ durch einen andern Wert von $\Sigma f(x)$ ersetzt. Dieser Ausdruck heißt **bestimmte Summe** und wird bezeichnet durch

$$\sum_{a+mh}^{a+nh} f(x) = \varphi(a + nh) - \varphi(a + mh).$$

Die Zahlen $a + mh$ und $a + nh$ werden **Grenzen** dieser Summe genannt.

Aus dieser Definition folgt

$$\sum_{a+mh}^{a+mh} f(x) = 0, \qquad \sum_{a+mh}^{a+(m+1)h} f(x) = f(a + mh).$$

Wenn c eine Zahl $a + kh$ ist, die zwischen a und $b = a + nh$ liegt, so ist

$$\sum_{a}^{b} f(x) = \varphi(b) - \varphi(a) = [\varphi(b) - \varphi(c)] + [\varphi(c) - \varphi(a)]$$

oder

$$\sum_{a}^{b} f(x) = \sum_{a}^{c} f(x) + \sum_{c}^{b} f(x).$$

Wenn man diesen Satz mehrmals anwendet, so findet man

$$\sum_{a}^{b} f(x) = \sum_{a}^{a+h} f(x) + \sum_{a+h}^{a+2h} f(x) + \cdots + \sum_{a+\overline{n-1}h}^{b} f(x).$$

Daraus folgt eine wichtige Formel

$$f(a) + f(a + h) + f(a + 2h) + \cdots + f(b - h) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Hier ist $f(x)$ die gegebene Funktion, $\varphi(x)$ irgend eine Funktion, deren Differenz gleich $f(x)$ ist, $\frac{b-a}{h}$ eine ganze positive Zahl. Diese Formel kann nur dann nützlich sein, wenn $\varphi(x)$ nicht die Form hat

$$f(a) + f(a + h) + f(a + 2h) + \cdots + f(x - h).$$

30. Berechnung einiger bestimmten Summen. 1) Es sei

$$s = a + (a + h) + (a + 2h) + \cdots + (a + \overline{n - 1}h).$$

Wenn wir $a + nh$ mit b bezeichnen, so wird

$$s = \sum_{a}^{b} x.$$

Ein Wert der unbestimmten Summe Σx ist (Nr. 26)

$$\Sigma x = \frac{x(x-h)}{2h};$$

deswegen ist

$$s = \frac{1}{2h}[b(b-h) - a(a-h)]$$

oder nach einigen Reduktionen

$$s = \frac{n}{2}[a + (a + \overline{n-1}h)].$$

2) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + 10 \cdot 11 \cdot 12 = \sum_{3}^{13} x(x-1)(x-2)$

$$= \frac{1}{4} \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10.$$

3) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{21 \cdot 23} = \sum_{1}^{23} \frac{1}{x(x+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{46} = \frac{11}{23}.$

4) $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \sum_{0}^{n} q^x = \frac{q^n - 1}{q-1}.$

5) $1 + \cos h + \cos 2h + \cdots + \cos(n-1)h = \sum_{0}^{nh} \cos x$

$$= \frac{\sin \frac{2n-1}{2}h + \sin \frac{h}{2}}{2 \sin \frac{h}{2}}.$$

Wenn wir von beiden Seiten $\frac{1}{2}$ abziehen, so finden wir

$$\frac{1}{2} + \cos h + \cos 2h + \cdots + \cos(n-1)h = \frac{\sin \frac{2n-1}{2}h}{2 \sin \frac{h}{2}}.$$

6) $\sin h + \sin 2h + \cdots + \sin(n-1)h = \sum_{0}^{nh} \sin x = \frac{\cos \frac{h}{2} - \cos \frac{2n-1}{2}h}{2 \sin \frac{h}{2}}.$

7) Wir wollen jetzt mit Anwendung von Formeln in Nr. 27 die Summen von Potenzen natürlicher Zahlen berechnen.

$$0 + 1 + 2 + \cdots + (x-1) = \sum_{0}^{x} x = \frac{x(x-1)}{2}.$$

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (x-1)^2 = \sum_{0}^{x} x^2 = \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{1}{3}x(x-1)(x-2)$$

$$= \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}.$$

$$0^3+1^3+2^3+\cdots+(x-1)^3=\sum_0^x x^3=\frac{1}{2}x(x-1)+x(x-1)(x-2)$$
$$+\frac{1}{4}x(x-1)(x-2)(x-3)=\left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2.$$

Daraus folgt die bemerkenswerte Relation

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(x-1)^3=[1+2+3+\cdots+(x-1)]^2.^*$$

Wenn wir $\frac{x^2}{1\cdot 2}$ und $\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}$ statt x^2 und x^3 summieren, so finden wir

$$\sum_0^x \frac{x}{1}=\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{1}{2}\cdot x=\frac{x(x-1)}{1\cdot 2},$$

$$\sum_0^x \frac{x^2}{1\cdot 2}=\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{1}{12}x=\frac{x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

$$\sum_0^x \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{12}\cdot\frac{x^2}{1\cdot 2}=\frac{x^2(x-1)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Im nächsten Kapitel werden wir die Funktion betrachten

$$\sum_0^x \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}=\varphi_n(x),$$

die, abgesehen von einem konstanten Faktor, von Jacob Bernoulli eingeführt ist.

Zweites Kapitel.

Die Jacob Bernoullische Funktion.

31. Bestimmung der Koeffizienten. Nach dem in Nr. 27 bewiesenen Satze ist die Jacob Bernoullische Funktion

$$\sum_0^x \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-1)}=\varphi_n(x) \tag{1}$$

eine ganze Funktion n^{ten} Grades, die wir in der Form

$$\varphi_n(x)=A_0\frac{x^n}{1\cdot 2\ldots n}+A_1\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}+A_2\frac{x^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)}+\cdots+A_{n-1}x \tag{2}$$

schreiben werden. Das konstante Glied fehlt, weil $\varphi_n(0)=0$ ist. Denn in Nr. 29 haben wir gesehen, daß die bestimmte Summe gleich Null ist, wenn ihre Grenzen einander gleich sind. Wir wollen die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ bestimmen.

* Vgl. Encykl. der Math. Wiss., Bd. I, p. 579.

Da

$$\varphi_n(x+1) = \sum_0^{x+1} \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)} = \sum_0^{x} \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)} + \sum_x^{x+1} \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}$$

ist, so besteht die Relation

$$(3) \qquad \varphi_n(x+1) - \varphi_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)},$$

die nur für ganze positive x bewiesen ist. Die ganze Funktion

$$F(x) = \varphi_n(x+1) - \varphi_n(x) - \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}$$

vom nicht höheren als n^{ten} Grade verschwindet für jeden ganzen positiven Wert von x. Also ist $F(x)$ identisch gleich Null und die Relation (3) besteht für jedes x.

Wenn eine andre ganze Funktion $\psi(x)$ die Eigenschaften

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}, \quad \psi(0) = 0$$

hat, so ist $\psi(x)$ mit $\varphi_n(x)$ identisch, weil beide Funktionen vom n^{ten} Grade (Nr. 4) sind und außerdem die Gleichungen

$$\psi(0) = \varphi(0), \quad \psi(1) = \varphi(1), \quad \psi(2) = \varphi(2), \ldots, \psi(n) = \varphi(n)$$

bestehen. Die Werte $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)$ bestimmen sich sukzessive aus der Gleichung (3).

Durch die Differentiation von (3) findet man

$$\varphi_n'(x+1) - \varphi_n'(x) = \frac{x^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)}.$$

Nach der Gleichung (2) ist $\varphi_n'(0) = A_{n-1}$. Deswegen ist $\varphi_n'(x) - A_{n-1}$ eine ganze Funktion, die für $x = 0$ verschwindet und deren Differenz gleich $\frac{x^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)}$ ist. Folglich ist für $n > 1$

$$\varphi_n'(x) - A_{n-1} = \varphi_{n-1}(x)$$

oder

$$(4) \qquad \varphi_n'(x) = \varphi_{n-1}(x) + A_{n-1}.$$

Aus dieser Relation schließen wir, daß

$$\varphi_{n-1}(x) = A_0 \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)} + A_1 \frac{x^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)} + \cdots + A_{n-2}x$$

ist, und daß die Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2}$ hier dieselben sind, wie in der Gleichung (2).

Wenn wir in (3) $x = 0$ setzen, so finden wir $\varphi_n(1) = 0$ oder

$$(5) \quad \frac{A_0}{1\cdot 2\ldots n} + \frac{A_1}{1\cdot 2\ldots(n-1)} + \frac{A_2}{1\cdot 2\ldots(n-2)} + \cdots + \frac{A_{n-2}}{1\cdot 2} + A_{n-1} = 0.$$

Diese Relation gibt die Möglichkeit, A_{n-1} zu berechnen, sobald die Koeffizienten $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2}$ bekannt sind.

Aus der Definition

$$\varphi_2(x) = \sum_0^x x$$

folgt, daß

$$\varphi_2(x) = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2}x$$

ist. Deswegen ist

$$A_0 = 1, \quad A_1 = -\frac{1}{2}.$$

Die Gleichung (5) für $n = 3$, 4 und 5 gibt

$$\frac{A_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A_1}{1 \cdot 2} + A_2 = 0,$$

$$\frac{A_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{A_1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A_2}{1 \cdot 2} + A_3 = 0,$$

$$\frac{A_0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{A_1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{A_2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{A_3}{1 \cdot 2} + A_4 = 0.$$

Daraus findet man

$$A_2 = \frac{1}{12}, \quad A_3 = 0, \quad A_4 = -\frac{1}{720}.$$

In dieser Weise kann man beliebig viele Koeffizienten berechnen.

32. Eigenschaften der Koeffizienten. Wenn man in der Relation

$$\varphi_{2k+1}(1+x) - \varphi_{2k+1}(x) = \frac{x^{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2k}$$

x durch $-x$ ersetzt, so findet man

$$\varphi_{2k+1}(1-x) - \varphi_{2k+1}(-x) = \frac{x^{2k}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2k}. \tag{6}$$

Wenn man die Bezeichnung

$$-\varphi_{2k+1}(1-x) = F(x)$$

einführt, so ist

$$-\varphi_{2k+1}(-x) = -\varphi_{2k+1}[1-(x+1)] = F(x+1).$$

Die Gleichung (6) nimmt die Form an

$$F(x+1) - F(x) = \frac{x^{2k}}{1 \cdot 2 \ldots 2k}.$$

Da aber $F(0) = 0$ ist, so ist nach dem in Nr. 31 bewiesenen Satze $F(x) = \varphi_{2k+1}(x)$ oder

$$\varphi_{2k+1}(1-x) = -\varphi_{2k+1}(x). \tag{7}$$

Vergleicht man die Ableitungen der beiden Seiten dieser Gleichung, so findet man mit Berücksichtigung der Gleichung (4)

$$-[\varphi_{2k}(1-x)+A_{2k}] = -[\varphi_{2k}(x)+A_{2k}]$$

oder

(8) $$\varphi_{2k}(1-x) = \varphi_{2k}(x).$$

Für $k=1$ ist die Ableitung von $\varphi_{2k}(x)$ keine Jacob Bernoullische Funktion, weil die Definitionsgleichung (1) in Nr. 31 für $n=1$ keinen Sinn hat. Aus der Differentiation von (8) folgt für $k>1$

$$-[\varphi_{2k-1}(1-x)+A_{2k-1}] = \varphi_{2k-1}(x)+A_{2k-1}$$

oder nach (7)

$$-A_{2k-1} = A_{2k-1}.$$

Es ist also

(9) $$A_{2k-1} = 0 \text{ für } k>1.$$

Wir haben schon in Nr. 31 gesehen, daß A_1 nicht Null ist, und daß $A_3=0$ ist. Jetzt überzeugen wir uns, daß $A_5=0$, $A_7=0,\ldots$ sind.

33. Das Vorzeichen von $\varphi_n(x)$ im Intervall (0, 1). Wenn man in (7) $x=\frac{1}{2}$ setzt, so findet man

$$\varphi_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Wir wollen untersuchen, ob für $k>1$ die Gleichung $\varphi_{2k+1}(x)=0$ noch eine Wurzel im Intervall (0, 1) hat.

Es sei vorausgesetzt, daß diese Gleichung außer 0 und 1 noch die Wurzeln a_1 und a_2 besitzt, die den Ungleichheiten

$$0<a_1<a_2<1$$

genügen. Hier darf a_1 oder a_2 gleich $\frac{1}{2}$ genommen werden. Nach dem Rolleschen Satze hat $\varphi'_{2k+1}(x)=0$ mindestens drei Wurzeln b_1, b_2 und b_3, die den Ungleichheiten genügen

$$0<b_1<a_1<b_2<a_2<b_3<1.$$

Die Gleichung $\varphi''_{2k+1}(x)=0$ hat mindestens zwei Wurzeln c_1 und c_2, die zwischen 0 und 1 liegen.

Es ist aber

$$\varphi''_{2k+1}(x) = \varphi_{2k-1}(x),$$

weil $A_{2k-1}=0$ ist. Die Gleichung $\varphi_{2k-1}(x)=0$ hat außerdem die Wurzeln 0 und 1.

Aus der Voraussetzung, daß die Gleichung $\varphi_{2k+1}(x)=0$ zwischen 0 und 1 zwei Wurzeln hat, folgt also, daß die Gleichung $\varphi_{2k-1}(x)=0$

in demselben Intervall auch zwei Wurzeln hat. Wenn wir diesen Schluß mehrmals anwenden, so finden wir, daß $\varphi_3(x)$ zwischen 0 und 1 zwei Wurzeln hat. Das ist aber unmöglich, weil die Funktion 3ten Grades $\varphi_3(x)$ nicht für vier verschiedene Werte von x (0 und 1 inbegriffen) verschwinden kann.

Es ist also bewiesen, daß die Gleichung $\varphi_{2k+1}(x) = 0$ zwischen 0 und 1 nur eine Wurzel $x = \frac{1}{2}$ hat.

Wir wollen jetzt die Gleichung $\varphi_{2k}(x) = 0$ untersuchen. Wenn diese Gleichung zwischen 0 und 1 die Wurzel a hat, so folgt nach dem Rolleschen Satze, daß die Gleichung $\varphi'_{2k}(x) = 0$ mindestens zwei Wurzeln zwischen 0 und 1 hat. Das ist aber unmöglich, weil $\varphi'_{2k}(x) = \varphi_{2k-1}(x)$ ist und wir eben bewiesen haben, daß $\varphi_{2k-1}(x)$ nicht für zwei Werte zwischen 0 und 1 verschwinden kann.

Es besteht also der Satz: Für alle Werte von x zwischen 0 und 1 hat die Funktion $\varphi_{2k}(x)$ dasselbe Vorzeichen.

Um dieses Vorzeichen zu bestimmen, betrachten wir die Gleichung $\varphi_{2k+1}(x) = 0$, die befriedigt wird für $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$. Nach dem Rolleschen Satze hat die Gleichung

$$\varphi'_{2k+1}(x) = \varphi_{2k}(x) + A_{2k} = 0$$

mindestens eine Wurzel $x = \alpha$, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegt.

Aus der Relation

$$\varphi_{2k}(\alpha) + A_{2k} = 0$$

folgt, daß A_{2k} nicht gleich Null sein kann, weil $\varphi_{2k}(x)$ nicht im Intervall (0, 1) verschwinden kann, und daß in demselben Intervall $\varphi_{2k}(x)$ das entgegengesetzte Vorzeichen hat, als A_{2k}.

Es ist aber

$$\varphi_{2k}(x) = \frac{x^{2k}}{1 \cdot 2 \ldots 2k} + A_1 \frac{x^{2k-1}}{1 \cdot 2 \ldots (2k-1)} + A_2 \frac{x^{2k-2}}{1 \cdot 2 \ldots (2k-2)}$$
$$+ A_4 \frac{x^{2k-4}}{1 \cdot 2 \ldots (2k-4)} + \cdots + A_{2k-2} \frac{x^2}{1 \cdot 2}.$$

Nach einem Satze der Algebra hat $\varphi_{2k}(x)$ für kleine positive Werte von x dasselbe Vorzeichen wie das Glied $A_{2k-2} \frac{x^2}{1 \cdot 2}$ oder wie A_{2k-2}.

Die Koeffizienten A_{2k-2} und A_{2k} haben also verschiedene Vorzeichen. Da aber $A_2 = \frac{1}{12} > 0$ ist, so ist

$$A_4 < 0, \quad A_6 > 0, \quad A_8 < 0, \ldots$$

Also ist

$$(-1)^{k-1} A_{2k} > 0,$$

und für $0 < x < 1$ besteht die Ungleichheit

$$(-1)^k \varphi_{2k}(x) > 0.$$

Die Funktion $\varphi_{2k+1}(x)$ wechselt ihr Vorzeichen im Intervall (0, 1), weil $x = \frac{1}{2}$ eine einfache Wurzel der Gleichung $\varphi_{2k+1}(x) = 0$ ist. Um diese Behauptung zu beweisen, nehmen wir an, daß

$$\varphi'_{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi_{2k}\left(\frac{1}{2}\right) + A_{2k} = 0$$

sei. Die Funktion $\varphi_{2k}(x) + A_{2k}$ verschwindet für $x = \alpha$ und $x = \frac{1}{2}$. Nach dem Rolleschen Satze soll

$$[\varphi_{2k}(x) + A_{2k}]' = \varphi_{2k-1}(x)$$

verschwinden für einen Wert von x zwischen α und $\frac{1}{2}$, was unmöglich ist.

34. Bernoullische Zahlen. Die Koeffizienten $A_2, A_4, A_6, \ldots$ werden oft durch die Zahlen $B_1, B_2, B_3, \ldots$ ausgedrückt, die man Bernoullische Zahlen nennt. Es sind Zahlen, die mit dem Vorzeichen + oder −, als Koeffizient von x in der ersten Potenz, in den Ausdrücken für

$$\sum_0^x x^2, \quad \sum_0^x x^4, \quad \sum_0^x x^6, \ldots$$

auftreten.

Es ist

$$\sum_0^x x^2 = 1 \cdot 2\varphi_3(x) = 1 \cdot 2A_2 x - x^2 + \frac{x^3}{3},$$

$$\sum_0^x x^4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4\varphi_5(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4A_4 x + \cdots$$

$$\sum_0^x x^6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6\varphi_7(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6A_6 x + \cdots$$

Es wird daher gesetzt

$$1 \cdot 2A_2 = B_1, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4A_4 = -B_2, \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6A_6 = B_3, \ldots$$

Allgemein ist

$$1 \cdot 2 \cdots 2k \cdot A_{2k} = (-1)^{k-1} B_k$$

oder

$$A_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} B_k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2k}. \tag{10}$$

Die ersten Bernoullischen Zahlen sind

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \cdots$$

Die Tabelle der 62 ersten B findet man bei J. C. Adams im Journal für Mathematik, Bd. 85 (1878), S. 269—272. Die ersten 20 Zahlen sind im Lehrbuch von A. A. Markoff abgedruckt (S. 125).

Auf die arithmetischen Eigenschaften der Bernoullischen Zahlen gehen wir hier nicht ein.*

35. Entwicklung von $\varphi_{2k}(x)$ in eine trigonometrische Reihe. Aus der Theorie der trigonometrischen Reihe (L. Dirichlet, Werke, Bd. I, S. 119—132) folgt, daß für

$$0 \leqq x \leqq 1$$

die Entwicklung

$$\varphi_{2k}(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos 2\pi x + a_2 \cos 4\pi x + \cdots + a_n \cos 2n\pi x + \cdots$$
$$+ b_1 \sin 2\pi x + b_2 \sin 4\pi x + \cdots + b_n \sin 2n\pi x + \cdots$$

besteht. Die Koeffizienten haben die Werte

$$a_n = 2\int_0^1 \varphi_{2k}(x) \cos 2n\pi x \cdot dx, \quad b_n = 2\int_0^1 \varphi_{2k}(x) \sin 2n\pi x \cdot dx.$$

Wenn wir $x = 1 - y$ im Ausdruck für b_n einsetzen, so wird wegen der Relation (8) in Nr. 32

$$b_n = -2\int_0^1 \varphi_{2k}(y) \sin 2n\pi y \cdot dy.$$

Folglich ist $b_n = -b_n$ oder $b_n = 0$.

Der Wert für

$$a_0 = 2\int_0^1 \varphi_{2k}(x) dx$$

läßt sich aus der Relation

$$\varphi'_{2k+1}(x) = \varphi_{2k}(x) + A_{2k}$$

bestimmen. Man findet

$$\frac{1}{2} a_0 = \int_0^1 \varphi_{2k}(x) dx = -A_{2k}.$$

Um a_n zu berechnen, werden wir das Integral

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(x) \cos 2n\pi x \cdot dx \quad \text{durch} \quad \int_0^1 \varphi_{2k-2}(x) \cos 2n\pi x \cdot dx$$

ausdrücken. Zu diesem Zweck gebrauchen wir die Formel

* Diesem Gegenstand ist der dritte Abschnitt des Werkes von Herrn L. Saalschütz gewidmet (Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen . . . Berlin 1893).

$$\int \varphi \psi'' dx = \varphi \psi' - \varphi' \psi + \int \psi \varphi'' dx, \tag{11}$$

die eine Folge der zweimaligen partiellen Integration ist.

Setzt man in (11)

$$\varphi = \varphi_{2k}(x), \qquad \psi'' = \cos 2n\pi x,$$

so findet man für $k > 1$

$$\varphi' = \varphi_{2k-1}(x), \qquad \psi' = \frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi},$$

$$\varphi'' = \varphi_{2k-2}(x) + A_{2k-2}, \quad \psi = -\frac{\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^2}.$$

Da aber

$$\int_0^1 \cos 2n\pi x \cdot dx = 0$$

ist, so wird

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(x) \cos 2n\pi x \cdot dx = \frac{-1}{(2n\pi)^2} \int_0^1 \varphi_{2k-2}(x) \cos 2n\pi x \cdot dx.$$

Wenn man diese Formel $(k-1)$ mal anwendet, so erhält man

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(x) \cos 2n\pi x \cdot dx = \frac{(-1)^{k-1}}{(2n\pi)^{2k-2}} \int_0^1 \varphi_2(x) \cos 2n\pi x \cdot dx.$$

Es sei jetzt in (11)

$$\varphi = \varphi_2(x), \qquad \psi'' = \cos 2n\pi x.$$

Daraus folgt

$$\varphi' = x - \frac{1}{2}, \qquad \psi' = \frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi},$$

$$\varphi'' = 1, \qquad \psi = -\frac{\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^2}$$

und

$$\int_0^1 \varphi_2(x) \cos 2n\pi x \cdot dx = \frac{1}{(2n\pi)^2}.$$

Man findet also

$$a_n = \frac{(-1)^{k-1} 2}{(2n\pi)^{2k}}.$$

Wenn man in der Entwicklung

$$\varphi_{2k}(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos 2\pi x + a_2 \cos 4\pi x + \cdots$$

x gleich Null setzt, so findet man die bemerkenswerte Formel von Euler

$$A_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} 2}{(2\pi)^{2k}} \left[1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots \right]. \tag{12}$$

Diese Formel wird später benutzt, um die Konvergenz einiger Reihen zu untersuchen.

Aus den Werten für A_2 und A_4 folgen die Formeln

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Dieses Kapitel habe ich unter dem Einfluß von W. G. Imschenetzky (Kasaner Universitäts-Nachrichten 1870 und französisch in J. Hoüel, Cours de calcul infinitésimal, Paris 1888, Bd. 1, S. 476) und Herrn N. J. Sonin (Warschauer Universitäts-Nachrichten 1888 und französisch im Journal für Mathematik, Bd. 116 (1896), S. 133) bearbeitet.

Drittes Kapitel.

Eulersche Summationsformel.

36. Eulersche Formel für ganze Funktionen. Es sei

$$f(x) = p_0 \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} + p_1 \frac{x^{n-2}}{1 \cdot 2 \ldots (n-2)} + \cdots + p_{n-2} x + p_{n-1}.$$

Wenn man diese Funktion von 0 bis x summiert, so findet man

$$\sum_0^x f(x) = p_0 \varphi_n(x) + p_1 \varphi_{n-1}(x) + \cdots + p_{n-2} \varphi_2(x) + p_{n-1} x.$$

Hier treten Bernoullische Funktionen ein. Wir wollen dieselben vollständig ausdrücken und die Glieder nach den Koeffizienten $A_1, A_2, A_3, \ldots$ anordnen.

In dieser Weise entsteht die Formel

$$\begin{aligned}
\sum_0^x f(x) = {} & p_0 \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + p_1 \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} + \cdots + p_{n-2} \frac{x^2}{1 \cdot 2} + p_{n-1} x \\
& + A_1 \left(p_0 \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} + p_1 \frac{x^{n-2}}{1 \cdot 2 \ldots (n-2)} + \cdots + p_{n-2} x \right) \\
& + A_2 \left(p_0 \frac{x^{n-2}}{1 \cdot 2 \ldots (n-2)} + p_1 \frac{x^{n-3}}{1 \cdot 2 \ldots (n-3)} + \cdots + p_{n-3} x \right) \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + A_{n-2} \left(p_0 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + p_1 x \right) \\
& + A_{n-1} p_0 x
\end{aligned}$$

oder

$$(1)\begin{cases}\sum\limits_0^x f(x)=\int\limits_0^x f(x)dx+A_1[f(x)-f(0)]+A_2[f'(x)-f'(0)] \\ \qquad +A_{n-2}[f^{(n-3)}(x)-f^{(n-3)}(0)]+A_{n-1}[f^{(n-2)}(x)-f^{(n-2)}(0)].\end{cases}$$

Das ist die **Eulersche Summationsformel**. Sie ist genau für ganze Funktionen vom $(n-1)^{\text{ten}}$ oder niedrigeren Grade.

37. Restglied der Eulerschen Formel. Wir wollen die Funktion

$$(2)\begin{cases}\psi(x)=\sum\limits_0^x f(x)-\int\limits_0^x f(x)dx-A_1[f(x)-f(0)]-A_2[f'(x)-f'(0)]-\cdots \\ \cdots-A_{n-2}[f^{(n-3)}(x)-f^{(n-3)}(0)]-A_{n-1}[f^{(n-2)}(x)-f^{(n-2)}(0)]\end{cases}$$

ausdrücken in dem Falle, daß $f(x)$ keine ganze Funktion vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist.

Die Differenz von $\psi(x)$ ist

$$(3)\quad\begin{cases}\Delta\psi(x)=f(x)-\Delta\int\limits_0^x f(x)dx-A_1\Delta f(x)-A_2\Delta f'(x)-\cdots \\ \qquad\cdots-A_{n-2}\Delta f^{(n-3)}(x)-A_{n-1}\Delta f^{(n-2)}(x).\end{cases}$$

Aus der Integralrechnung ist bekannt, daß

$$\Delta F(x)=F(x+1)-F(x)=F'(x)+\frac{1}{1\cdot 2}F''(x)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}F'''(x)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}F^{(m)}(x)+\int\limits_0^1\frac{(1-u)^m}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}F^{(m+1)}(x+u)du$$

ist.

Nachdem wir sukzessive

$$F(x)=\int\limits_0^x f(x)dx,\qquad f(x),\qquad f'(x),\ \ldots,\ f^{(n-2)}(x)$$

$$m=n,\qquad\qquad n-1,\qquad n-2,\ \ldots,\qquad 1$$

gesetzt haben, so verwandelt sich (3) in

$$\Delta\psi(x) = f(x)$$

$$- f(x) - \frac{1}{1\cdot 2} f'(x) - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f''(x) - \cdots - \frac{1}{1\cdot 2 \ldots n} f^{(n-1)}(x) - \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{1\cdot 2\ldots n} f^{(n)}(x+u)\,du$$

$$- A_1 f'(x) - \frac{A_1}{1\cdot 2} f''(x) - \cdots - \frac{A_1}{1\cdot 2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x) - \int_0^1 \frac{A_1(1-u)^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x+u)\,du$$

$$- A_2 f''(x) - \cdots - \frac{A_2}{1\cdot 2\ldots(n-2)} f^{(n-1)}(x) - \int_0^1 \frac{A_2(1-u)^{n-2}}{1\cdot 2\ldots(n-2)} f^{(n)}(x+u)\,du$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$- A_{n-1} f^{(n-1)}(x) - \int_0^1 A_{n-1}(1-u) f^{(n)}(x+u)\,du$$

oder

$$\Delta\psi(x) = -\varphi_2(1) f'(x) - \varphi_3(1) f''(x) - \cdots$$

$$- \varphi_n(1) f^{(n-1)}(x) - \int_0^1 \varphi_n(1-u) f^{(n)}(x+u)\,du.$$

Da die Werte $\varphi_2(1), \varphi_3(1), \ldots, \varphi_n(1)$ gleich Null sind, so ist

$$\Delta\psi(x) = -\int_0^1 \varphi_n(1-u) f^{(n)}(x+u)\,du.$$

Nach der Formel (2) ist $\psi(0) = 0$ und folglich

$$\psi(x) = -\int_0^1 \varphi_n(1-u) \sum_0^x f^{(n)}(x+u)\,du. \tag{4}$$

Es wird hier nach x summiert und nach u integriert.

Wir werden $n = 2k$ setzen. Wegen der Relation

$$\varphi_{2k}(1-u) = \varphi_{2k}(u)$$

ist dann

$$\psi(x) = -\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^x f^{(2k)}(x+u). \tag{5}$$

Das ist das Restglied von **Jacobi** (Journal für Math., Bd. 12 (1834), p. 263 oder Werke, Bd. 6, p. 64).

Wenn man in (5) die Bernoullische Funktion $\varphi_{2k}(u)$ durch die trigonometrische Reihe (Nr. 35) ausdrückt, so findet man das Restglied von Poisson (Pariser Mémoires, Bd. 6 (1826), p. 580). Wir werden die Jacobische Form gebrauchen.

Die Funktion $\varphi_{2k}(u)$ behält ihr Vorzeichen im Intervall zwischen 0 und 1. Deswegen folgt aus (5)

$$\psi(x) = -\sum_0^x f^{(2k)}(x+\theta)\cdot\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du,$$

wo $0 < \theta < 1$ ist.

Da aber

$$\varphi'_{2k+1}(u) = \varphi_{2k}(u) + A_{2k},$$

so ist

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du = -A_{2k}$$

und folglich

$$\psi(x) = A_{2k}\sum_0^x f^{(2k)}(x+\theta). \tag{6}$$

Wir haben also bewiesen, daß für jede Funktion $f(x)$, die gewissen Stetigkeitsbedingungen genügt, die Formel besteht

$$\tag{7}\left\{\begin{aligned} &f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(x-1)\\ &=\int_0^x f(x)\,dx + A_1[f(x)-f(0)] + A_2[f'(x)-f'(0)]+\cdots\\ &+A_{2k-2}[f^{(2k-3)}(x)-f^{(2k-3)}(0)]+A_{2k-1}[f^{(2k-2)}(x)-f^{(2k-2)}(0)]\\ &+A_{2k}[f^{(2k)}(\theta)+f^{(2k)}(\theta+1)+\cdots+f^{(2k)}(\theta+x-1)].\end{aligned}\right.$$

Für $x = 1$ ist

$$\tag{8}\left\{\begin{aligned} &f(0)=\int_0^1 f(x)\,dx + A_1[f(1)-f(0)] + A_2[f'(1)-f'(0)]+\cdots\\ &\quad A_{2k-2}[f^{(2k-3)}(1)-f^{(2k-3)}(0)]\\ &\quad +A_{2k-1}[f^{(2k-2)}(1)-f^{(2k-2)}(0)]+A_{2k}f^{(2k)}(\theta).\end{aligned}\right.$$

Die Glieder mit A_{2k-1} fallen weg, sobald $k > 1$ ist (Nr. 32, Form. 9). Für $k = 1$ ist

$$(9)\quad \begin{cases} f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(x-1) \\ = \int\limits_0^x f(x)dx + A_1[f(x)-f(0)] \\ + A_2[f''(\theta)+f''(\theta+1)+f''(\theta+2)+\cdots+f''(\theta+x-1)] \end{cases}$$

und

$$(10)\qquad f(0) = \int\limits_0^1 f(x)dx + A_1[f(1)-f(0)] + A_2 f''(\theta).$$

38. Andre Form des Restgliedes. Wenn die Ableitungen $f^{(2k)}(t)$ und $f^{(2k+2)}(t)$ für Werte von t zwischen 0 und x ihre Vorzeichen behalten und dieselben Vorzeichen haben, kann das Restglied (6) eine andre Form annehmen.

In der Formel

$$\int \varphi\omega'' du = \varphi\omega' - \varphi'\omega + \int \omega\varphi'' du$$

setzen wir

$$\varphi = \sum_0^x f^{(2k)}(x+u), \qquad \omega'' = \varphi_{2k}(u) + A_{2k}.$$

Dann wird

$$\varphi' = \sum_0^x f^{(2k+1)}(x+u), \quad \omega' = \varphi_{2k+1}(u),$$

$$\varphi'' = \sum_0^x f^{(2k+2)}(x+u), \quad \omega = \varphi_{2k+2}(u),$$

und folglich ist

$$-\int\limits_0^1 \sum_0^x f^{(2k)}(x+u)\cdot[\varphi_{2k}(u)+A_{2k}]du$$

$$= -\int\limits_0^1 \varphi_{2k+2}(u)du \cdot \sum_0^x f^{(2k+2)}(x+u).$$

Es besteht also die Relation

$$-\int\limits_0^1 \varphi_{2k}(u)du \cdot \sum_0^x f^{(2k)}(x+u)$$

$$= A_{2k}\sum_0^x \int\limits_0^1 f^{(2k)}(x+u)du - \int\limits_0^1 \varphi_{2k+2}(u)du \cdot \sum_0^x f^{(2k+2)}(x+u).$$

Da aber

$$\int_0^1 f^{(2k)}(x+u)\,du = f^{(2k-1)}(x+1) - f^{(2k-1)}(x) = \Delta f^{(2k-1)}(x),$$

so ist

$$\sum_0^x \int_0^1 f^{(2k)}(x+u)\,du = f^{(2k-1)}(x) - f^{(2k-1)}(0)$$

und folglich

$$-\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^x f^{(2k)}(x+u)$$

$$= A_{2k}[f^{(2k-1)}(x) - f^{(2k-1)}(0)] - \int_0^1 \varphi_{2k+2}(u)\,du \sum_0^x f^{(2k+2)}(x+u).$$

Das erste und letzte Glied dieser Formel haben verschiedene Vorzeichen, weil, nach dem in Nr. 33 bewiesenen Satze, $\varphi_{2k}(u)$ und $\varphi_{2k+2}(u)$ im Intervalle $(0, 1)$ verschiedene Vorzeichen haben und nach unsrer Voraussetzung $f^{(2k)}(t)$ und $f^{(2k-2)}(t)$ gleiche Vorzeichen haben.

Die gefundene Relation hat die Form

$$a = b + c,$$

wo $ac < 0$ ist. Aus der Gleichung

$$a^2 = ab + ac$$

folgt

$$0 < a^2 < ab, \quad 0 < \frac{a}{b} < 1.$$

Es ist also

$$a = \theta b,$$

wo $0 < \theta < 1$ ist.

Nach dieser Bemerkung ist

$$\psi(x) = \theta \cdot A_{2k}[f^{(2k-1)}(x) - f^{(2k-1)}(0)]. \tag{11}$$

Diese Formel kann statt (6) gebraucht werden, sobald $f(t)$ gewissen Bedingungen genügt. (Vgl. Markoff, Differenzenrechnung, S. 121.)

39. Zweite Form der Eulerschen Formel. Wir werden voraussetzen, daß für alle positiven Werte von t die Ableitungen $f''(t)$, $f^{\mathrm{IV}}(t)$, $f^{(6)}(t), \ldots$ dieselben Vorzeichen behalten und daß alle Ableitungen $f'(t)$, $f''(t)$, $f'''(t), \ldots$ unendlich klein werden, sobald t unendlich groß wird.

In diesem Falle hat das Integral

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \cdot \sum_0^\infty f^{(2k)}(t+u)$$

einen Sinn. Es bedeutet, daß das Integral

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \cdot \sum_0^x f^{(2k)}(t+u)$$

bei unendlich wachsendem x sich einer bestimmten Grenze nähert.

In der Tat, bei wachsendem x vergrößert sich der absolute Betrag des Integrals, weil neue Elemente mit demselben Vorzeichen zutreten. Sobald aber x hinreichend groß ist, so ist

$$\left|\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \cdot \sum_0^x f^{(2k)}(t+u)\right| < |A_{2k}|\{1 + |f^{(2k-1)}(0)|\},$$

weil hier die Formel (11) anwendbar ist und nach der gemachten Voraussetzung $|f^{(2k-1)}(x)|$ beliebig klein sein kann.

Nach bekanntem Prinzip hat das Integral eine bestimmte Grenze.

Aus der Relation

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^x f^{(2k)}(t+u)$$

$$= A_{2k}[f^{(2k-1)}(0) - f^{(2k-1)}(x)] + \int_0^1 \varphi_{2k+2}(u)\,du \sum_0^x f^{(2k+2)}(t+u)$$

folgt

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^\infty f^{(2k)}(t+u)$$

$$= A_{2k} f^{(2k-1)}(0) + \int_0^1 \varphi_{2k+2}(u)\,du \sum_0^\infty f^{(2k+2)}(t+u).$$

Da aber

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^\infty f^{(2k)}(t+u) \quad \text{und} \quad \int_0^1 \varphi_{2k+2}(u)\,du \sum_0^\infty f^{(2k+2)}(t+u)$$

verschiedene Vorzeichen haben, so ist nach der Bemerkung im vorigen Paragraphen

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^\infty f^{(2k)}(t+u) = \theta_1 A_{2k} f^{(2k-1)}(0),$$

wo $0 < \theta_1 < 1$ ist.

Um diese Formel zu verallgemeinern, genügt es zu setzen

$$f(t) = f(x+v) = F(v),$$

wo v eine neue unabhängige Variable ist und x einen bestimmten Wert hat.

Nach der bewiesenen Formel ist

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^\infty F^{(2k)}(v+u) = \theta_2 A_{2k} F^{(2k-1)}(0)$$

oder

$$\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_x^\infty f^{(2k)}(t+u) = \theta_2 A_{2k} f^{(2k-1)}(x), \tag{12}$$

wo $0 < \theta_2 < 1$ ist.

Wenn man in der Eulerschen Formel das Restglied

$$-\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^x f^{(2k)}(t+u)$$

durch

$$-\int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^\infty f^{(2k)}(t+u) + \int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_x^\infty f^{(2k)}(t+u)$$

ersetzt, so findet man

$$\sum_0^x f(t) = \int_0^x f(t)\,dt + C_k + A_1 f(x) + A_2 f'(x) + \cdots$$

$$\cdots + A_{2k-1} f^{(2k-2)}(x) + \int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_x^\infty f^{(2k)}(t+u),$$

wo

$$C_k = -A_1 f(0) - A_2 f'(0) - \cdots$$

$$\cdots - A_{2k-1} f^{(2k-2)}(0) - \int_0^1 \varphi_{2k}(u)\,du \sum_0^\infty f^{(2k)}(t+u).$$

Jetzt wollen wir beweisen, daß die Konstante C_k von k unabhängig ist.

Für $k=1$ ist

$$\sum_0^x f(t) = \int_0^x f(t)\,dt + C_1 + A_1 f(x) + \int_0^1 \varphi_2(u)\,du \sum_x^\infty f''(t+u).$$

Mit Benutzung von (12) findet man

$$\sum_0^x f(t) = C_k + \int_0^x f(t)dt + A_1 f(x) + A_2 f'(x) + \cdots$$
$$+ A_{2k-1} f^{(2k-2)}(x) + \theta A_{2k} f^{(2k-1)}(x)$$

und

$$\sum_0^x f(t) = C_1 + \int_0^x f(t)dt + A_1 f(x) + \theta_1 A_2 f'(x).$$

Der Vergleich der beiden Formeln gibt die Relation

$$C_k + A_2 f'(x) + \cdots + A_{2k-1} f^{(2k-2)}(x) + \theta A_{2k} f^{(2k-1)}(x)$$
$$= C_1 + \theta_1 A_2 f'(x),$$

die für jeden ganzzahligen positiven Wert von x besteht.

Bei unendlich wachsendem x sind alle Ableitungen von $f(x)$ unendlich klein und folglich ist $C_k = C_1$.

Es ist also die Formel bewiesen

$$(13)\quad \begin{cases} \sum_0^x f(t) = C + \int_0^x f(t)dt + A_1 f(x) + A_2 f'(x) + \cdots \\ \qquad + A_{2k-1} f^{(2k-2)}(x) + \theta A_{2k} f^{(2k-1)}(x), \end{cases}$$

wo $0 < \theta < 1$ ist.

40. Der allgemeinere Fall der Eulerschen Formel. Bis jetzt haben wir die bestimmte Summe von der Form

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(x-1)$$

betrachtet. Nun wollen wir zur Summe

$$F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots + F(b-h),$$

wo $b = a + xh$ ist, übergehen.

Es sei

$$F(a+th) = f(t);$$

dann ist

$$F(a) = f(0),\quad F(a+h) = f(1),\quad F(a+2h) = f(2), \cdots$$
$$F(b-h) = f(x-1)$$

und folglich

$$F(a) + F(a+h) + \cdots + F(b-h) = f(0) + f(1) + \cdots + f(x-1).$$

Wenn wir berücksichtigen, daß

$$f^{(m)}(t) = h^m F^{(m)}(a + th),$$

$$f^{(m)}(x) = h^m F^{(m)}(b), \quad f^{(m)}(0) = h^m F^{(m)}(a),$$

so nehmen die Formeln (7), (8), (9) und (10) die Formen an

$$(14)\begin{cases} F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots + F(b-h) \\ \qquad = \frac{1}{h}\int\limits_a^b F(u)du + A_1[F(b) - F(a)] + A_2 h[F'(b) - F'(a)] + \cdots \\ \qquad + A_{2k-1} h^{2k-2} [F^{(2k-2)}(b) - F^{(2k-2)}(a)] \\ \qquad + A_{2k} h^{2k} [F^{(2k)}(a+\theta h) + F^{(2k)}(a+1+\theta h) + \cdots + F^{2k}(b-h+\theta h)], \end{cases}$$

$$(15)\begin{cases} F(a) = \frac{1}{h}\int\limits_a^{a+h} F(u)du + A_1[F(a+h) - F(a)] + A_2 h[F'(a+h) - F'(a)] + \cdots \\ \qquad + A_{2k-1} h^{2k-2}[F^{(2k-2)}(a+h) - F^{(2k-2)}(a)] + A_{2k} h^{2k} F^{(2k)}(a+\theta h), \end{cases}$$

$$(16)\begin{cases} F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots + F(b-h) \\ \qquad = \frac{1}{h}\int\limits_a^b F(u)du + A_1[F(b) - F(a)] \\ \qquad + A_2 h^2 [F''(a+\theta h) + F''(a+1+\theta h) + \cdots + F''(b-h+\theta h)] \end{cases}$$

und

$$(17)\quad F(a) = \frac{1}{h}\int\limits_a^{a+h} F(u)du + A_1[F(a+h) - F(a)] + A_2 h^2 F''(a+\theta h).$$

In allen diesen Formeln ist $b = a + xh$ und x eine ganze positive Zahl.

Wenn die Ableitungen $F''(t)$, $F^{IV}(t)$, $F^{(6)}(t), \ldots$ für $t \geqq a$ dieselben Vorzeichen behalten und die Ableitungen $F'(t)$, $F''(t)$, $F'''(t), \ldots$ unendlich klein werden, sobald t unendlich groß wird, dann besteht die Formel

$$(18)\quad\begin{cases} F(a) + F(a+h) + F(a+2h) + \cdots + F(b-h) \\ \qquad = C + \frac{1}{h}\int\limits_a^b F(u)du + A_1 F(b) + A_2 h F'(b) + \cdots \\ \qquad + A_{2k-1} h^{2k-2} F^{(2k-2)}(b) + \theta A_{2k} h^{2k-1} F^{(2k-1)}(b), \end{cases}$$

wo die Konstante C von b und k unabhängig ist. (Vgl. Markoff, Differenzenrechnung, S. 131—133.)

Viertes Kapitel.

Anwendungen der Eulerschen Formel.

41. Entwicklung von $\frac{1}{e^t-1}$ in eine Reihe. Setzt man in der Formel (8) (Nr. 37)

$$f(x) = e^{tx},$$

so wird

$$\int_0^1 e^{tx}dx = \frac{e^t-1}{t}, \quad f^{(m)}(1) = t^m e^t, \quad f^{(m)}(0) = t^m, \quad f^{(2k)}(x) = t^{2k}e^{tx}$$

und folglich

$$1 = \frac{e^t-1}{t} + A_1(e^t-1) + A_2 t(e^t-1) + \cdots$$
$$+ A_{2k-2}t^{2k-3}(e^t-1) + A_{2k-1}t^{2k-2}(e^t-1) + A_{2k}t^{2k}e^{\theta t}.$$

Nach der Formel (12) (Nr. 35) ist das Restglied

$$A_{2k}t^{2k}e^{\theta t} = e^{\theta t}\cdot(-1)^{k-1}2\cdot\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{2k}\left[1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots\right].$$

Bei wachsendem k bleibt

$$M_k = 1 + \left(\frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}}\right) + \left(\frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \frac{1}{6^{2k}} + \frac{1}{7^{2k}}\right) + \left(\frac{1}{8^{2k}} + \cdots\right.$$

endlich, weil

$$1 < M_k < 1 + \left(\frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}}\right) + \left(\frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}}\right) + \left(\frac{1}{8^{2k}} + \cdots\right)$$

oder

$$1 < M_k < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{2k-1}}}$$

ist. Daraus folgt, daß $\lim M_k = 1$ ist.

Es ist also für $|t| < 2\pi$ das Restglied dem absoluten Betrage nach beliebig klein für hinreichend große Werte von k

Folglich besteht für $|t| < 2\pi$ die konvergente Reihe

$$1 = \frac{e^t-1}{t} + A_1(e^t-1) + A_2 t(e^t-1) + A_4 t^3(e^t-1) + \cdots$$

oder

$$\frac{1}{e^t-1} = \frac{1}{t} + A_1 + A_2 t + A_4 t^3 + \cdots \tag{1}$$

42. Entwicklung von $\operatorname{ctg} x$ und $\operatorname{tg} x$ in eine Reihe. In der Formel (8) (Nr. 37) setzen wir

$$f(x) = \cos(tx).$$

Dann wird

$$\int_0^1 \cos(tx)dx = \frac{\sin t}{t}, \quad f'(t) = -t\sin(tx), \quad f'''(t) = +t^3\sin(tx),$$
$$\ldots, f^{(2k)}(x) = (-1)^{k-1}t^{2k}\cos(tx),$$

und folglich ist

$$1 = \frac{\sin t}{t} + A_1 (\cos t - 1) - A_2 t \sin t + A_4 t^3 \sin t - \cdots$$
$$+ A_{2k-2}(-1)^{k-1} t^{2k-3} \sin t + A_{2k}(-1)^{k-1} t^{2k} \cos(\theta t).$$

Da aber

$$1 - A_1(\cos t - 1) = \frac{1 + \cos t}{2} = \cos^2 \frac{t}{2},$$

so findet man nach der Division durch

$$\sin t = 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$$

die Formel

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \frac{1}{t} - A_2 t + A_4 t^3 - A_6 t^5 + \cdots$$
$$+ (-1)^{k-1} A_{2k-2} t^{2k-3} + (-1)^{k-1} A_{2k} t^{2k} \frac{\cos(\Theta t)}{\sin t}.$$

Ebenso, wie in Nr. 41, kann man beweisen, daß das Restglied für $|t| < 2\pi$ und für hinreichend große k beliebig klein wird.

Wenn man x statt $\frac{t}{2}$ einsetzt, so entsteht die Entwicklung

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - 2^2 A_2 x + 2^4 A_4 x^3 - 2^6 A_6 x^5 + \cdots, \tag{2}$$

die für $|x| < \pi$ konvergiert.

Mit Hilfe der Relation

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{ctg} 2x$$

findet man die Reihe

$$\operatorname{tg} x = 2^2(2^2 - 1) A_2 x - 2^4(2^4 - 1) A_4 x^3 + 2^6(2^6 - 1) A_6 x^5 - \cdots, \tag{3}$$

wenn $|x| < \frac{\pi}{2}$ ist.

43. Stirlingsche Reihe. Wir wenden die Formel (18)(Nr. 40) an und setzen

$$F(x) = \log x, \quad a = 1, \quad h = 1, \quad b = x.$$

Man findet dann

$$\int \log x dx = x \log x - x, \quad F'(x) = x^{-1}, \quad F''(x) = -x^{-2}, \cdots$$
$$\ldots, \; F^{(m)}(x) = (-1)^{m-1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1) x^{-m}$$

und folglich

$$\log [1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (x-1)] = C + x \log x - x + A_1 \log x$$
$$+ A_2 x^{-1} + A_4 1 \cdot 2 x^{-3} + \cdots + A_{2k-2} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k-4) x^{-(2k-3)}$$
$$+ \theta A_{2k} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2k-2) x^{-(2k-1)}.$$

Indem man zu beiden Seiten $\log x$ addiert und A_1 durch seinen Wert $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ersetzt, so erhält man

$$(4)\quad \begin{cases} \log(1\cdot 2\cdot 3\ldots x) = C + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + A_2 x^{-1} \\ + A_4 1\cdot 2 x^{-3} + \cdots + A_{2k-2} 1\cdot 2\cdot 3\ldots(2k-4)x^{-(2k-3)} \\ \qquad + \theta A_{2k} 1\cdot 2\cdot 3\ldots(2k-2)x^{-(2k-1)}. \end{cases}$$

Hier ist $k>1$ vorausgesetzt. Für $k=1$ besteht die Formel

$$(5)\qquad \log(1\cdot 2\cdot 3\ldots x) = C + \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \theta_1 A_2 x^{-1}.$$

Es sind θ und θ_1 Größen zwischen 0 und 1.

Es bleibt noch die Konstante C zu bestimmen. Zu diesem Zweck wenden wir die Wallissche Formel an:

$$\frac{\pi}{2} = \lim \Phi(n) \quad \text{für} \quad \lim n = \infty,$$

wo

$$\Phi(n) = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots\frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$$

ist. Mittels einfacher Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\Phi(n) &= \left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1} \\ &= \left[\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\ldots 2n\cdot 2n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(2n-1)2n}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{(2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n)^4}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots 2n)^2}\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{2^{4n}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\ldots n)^4}{(1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n)^2\cdot 2n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2n}}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\log\Phi(n) &= 4n\log 2 + 4\log(1\cdot 2\cdot 3\ldots n) \\ &\quad - 2\log(1\cdot 2\cdot 3\ldots 2n) - \log(2n) - \log\left(1+\frac{1}{2n}\right)\end{aligned}$$

oder mit Benutzung von (5)

$$\begin{aligned}\log\Phi(n) &= 4n\log 2 + 4C + (4n+2)\log n - 4n + 4\theta_1 A_2\frac{1}{n} \\ &\quad - \log 2 - \log n - \log\left(1+\frac{1}{2n}\right) \\ &\quad - (4n+1)\log 2 - 2C - (4n+1)\log n + 4n - \theta_2 A_2\frac{1}{n} \\ &= -2\log 2 + 2C + 4\theta_1 A_2\frac{1}{n} - \log\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \theta_2 A_2\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Wenn wir jetzt n unendlich wachsen lassen, so wird

$$\lim \log \Phi(n) = \log \frac{\pi}{2}, \quad \lim \left[4\theta_1 A_2 \frac{1}{n}\right] = 0,$$

$$\lim \log \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 0, \quad \lim \left[\theta_2 A_2 \frac{1}{n}\right] = 0$$

und folglich

$$\log \frac{\pi}{2} = -2 \log 2 + 2C.$$

Daraus findet man

$$C = \log \sqrt{2\pi}.$$

Es bestehen also die Formeln

$$(6) \quad \begin{cases} \log (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x) = \log \sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + A_2 x^{-1} \\ + A_4 1 \cdot 2 x^{-3} + \cdots + A_{2k-2} 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2k-4) x^{-(2k-3)} \\ \qquad + \theta A_{2k} 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2k-2) x^{-(2k-1)} \end{cases}$$

und

$$(7) \quad \log (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x) = \log \sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + \theta_1 A_2 x^{-1}.$$

Da $0 < \theta_1 < 1$ und $A_2 = \frac{1}{12}$ ist, so folgt aus (7)

$$\log \sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x < \log (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x) < \log \sqrt{2\pi} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + \frac{1}{12x}$$

oder

$$(8) \quad \sqrt{2\pi x} \cdot x^x \cdot e^{-x} < 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x < \sqrt{2\pi x} \cdot x^x \cdot e^{-x} \cdot e^{\frac{1}{12x}}.$$

Für große Werte von x kann die Näherungsformel

$$(9) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x = \sqrt{2\pi x} \cdot x^x \cdot e^{-x}$$

gebraucht werden.

44. Untersuchung des Restgliedes der Stirlingschen Reihe. Die Gleichung (6) ist die Stirlingsche Reihe, deren Konvergenz wir jetzt untersuchen wollen. Zu diesem Zwecke muß man sehen, ob das Restglied bei unendlich wachsendem k unendlich klein wird.

Nach der Formel (12) (Nr. 35) ist

$$\theta A_{2k} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2k-2) x^{-(2k-1)}$$

$$= \theta \cdot (-1)^{k-1} 2x \cdot \left(\frac{1}{2\pi x}\right)^3 \cdot \frac{2}{2\pi x} \cdots \frac{2k-2}{2\pi x} \cdot \left[1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots\right].$$

In Nr. 41 ist bewiesen, daß bei wachsendem k sich die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \cdots$$

der Grenze Eins nähert. Für jeden Wert von x wird aber das Produkt

$$\frac{1}{2\pi x} \cdot \frac{2}{2\pi x} \cdot \frac{3}{2\pi x} \cdots \frac{2k-2}{2\pi x}$$

beliebig groß für hinreichend große Werte von k.

Daher ist die Stirlingsche Reihe divergent. Für große Werte von x und kleine Werte von k ist das Restglied dem absoluten Betrage nach sehr klein. In diesem Falle gibt die Stirlingsche Reihe eine gute Annäherung für

$$\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x).$$

Z. B. für $x = 100$ und $k = 3$ ist der Fehler $< \frac{1}{2 \cdot 10^{10}}$. (Markoff, Differenzenrechnung, S. 137.)

Für einen bestimmten Wert von x ist der Fehler dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$|A_{2k}| \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2k-2) x^{-(2k-1)}.$$

Die beste Annäherung bekommt man für einen solchen Wert von k, für den der Ausdruck

$$u_k = 2x \cdot \left(\frac{1}{2\pi x}\right)^3 \cdot \frac{2}{2\pi x} \cdot \frac{3}{2\pi x} \cdots \frac{2k-2}{2\pi x} \cdot \left[1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \cdots\right]$$

den kleinsten Wert annimmt, weil der absolute Betrag des Restgliedes kleiner als u_k ist.

Für $k \geqq 6$ ist

$$\frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} + \cdots < \frac{1}{2047}.$$

Deswegen kann man angenähert setzen

$$u_k = 2x \cdot \left(\frac{1}{2\pi x}\right)^3 \cdot \frac{2}{2\pi x} \cdot \frac{3}{2\pi x} \cdots \frac{2k-2}{2\pi x}.$$

Da aber angenähert

$$u_{k+1} = 2x \cdot \left(\frac{1}{2\pi x}\right)^3 \cdot \frac{2}{2\pi x} \cdots \frac{2k-2}{2\pi x} \cdot \frac{2k-1}{2\pi x} \cdot \frac{2k}{2\pi x},$$

so ist

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{2k-1}{2\pi x} \cdot \frac{2k}{2\pi x} < \left(\frac{k}{\pi x}\right)^2.$$

Die absoluten Beträge der Glieder der Stirlingschen Reihe nehmen also ab, solange $k < \pi x$ bleibt. Die beste Annäherung erfolgt also, wenn k nahe zu $\pi x + 1$ liegt.*

45. Angenäherte Berechnung der Summe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x-1}$$

für große Werte von x. In der Formel (18) (Nr. 40) setzen wir

$$F(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 1, \quad h = 1, \quad b = x.$$

Dann finden wir

$$\int \frac{dx}{x} = \log x, \quad F^{(m)}(x) = (-1)^m 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m x^{-(m+1)}$$

und folglich

$$(10) \quad \begin{cases} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{x-1} = C + \log x - \frac{1}{2}\frac{1}{x} - A_2 x^{-2} \\ \quad - A_4 1 \cdot 2 \cdot 3 x^{-4} - \cdots - A_{2k-2} 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2k-3) x^{-(2k-2)} \\ \qquad\qquad - \theta A_{2k} 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2k-1) x^{-2k}. \end{cases}$$

Die Konstante C läßt sich nicht durch bekannte Konstanten ausdrücken, sie läßt sich nur angenähert berechnen.

Wenn man $x = 10$, $k = 7$ setzt und das Restglied vernachlässigt, so findet man

$$C = 0{,}57721 \quad 56649 \quad 01532 \ldots$$

Das ist die Eulersche Konstante.

Ebenso wie in Nr. 43 kann man zeigen, daß die Reihe (10) für jeden Wert von x divergiert. Deswegen darf zur Berechnung der betrachteten Summe nur eine geringe Anzahl der Glieder der Reihe genommen werden.

In die Untersuchung, wie groß diese Anzahl sein kann, werden wir uns nicht einlassen.

* Vgl. Encykl. der Math. Wiss., Bd. I, p. 103.

Dritter Teil.

Differenzengleichungen.

Erstes Kapitel.

Allgemeines über Differenzengleichungen.

46. Zwei Formen der Differenzengleichungen. Eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad \Phi(x,\, y_x,\, \Delta y_x,\, \Delta^2 y_x, \ldots, \Delta^m y_x) = 0$$

heißt Differenzengleichung. Hier ist Φ eine gegebene Funktion, y_x eine unbekannte Funktion.

Bei Anwendung der Formeln

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x,$$

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^m y_x = y_{x+m} - m y_{x+m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} y_{x+m-2} - \cdots + (-1)^m y_x$$

nimmt die Gleichung (1) die andre Form an

$$(2) \qquad \psi(x,\, y_x,\, y_{x+1},\, y_{x+2}, \ldots, y_{x+m}) = 0.$$

Ist die Gleichung in der Form (2) gegeben, so kann man sie in die Form (1) überführen. Es genügt, die Formeln

$$y_{x+1} = y_x + \Delta y_x,$$

$$y_{x+2} = y_x + 2\Delta y_x + \Delta^2 y_x,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{x+m} = y_x + m\Delta y_x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_x + \cdots + \Delta^m y_x$$

anzuwenden.

Von diesen beiden Formen (1) und (2) ist (2) die bequemere. Es ist einfacher, eine gegebene Funktion statt y_x in die Gleichung (2), als in (1) einzusetzen.

Wenn bei der Transformation (1) in (2) z. B. die Größen y_x und y_{x+1} wegfallen, so wird die Gleichung (2) dadurch vereinfacht, daß man $y_{x+2} = z_x$ setzt.

Es sei die Gleichung

$$\Delta^3 y_x + \Delta^2 y_x - \Delta y_x - y_x = 0$$

gegeben. Mit Anwendung der Formeln

$$\Delta^3 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x,$$

$$\Delta^2 y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x,$$

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

geht diese Gleichung in

$$y_{x+3} - 2y_{x+2} = 0$$

über. Setzt man $y_{x+2} = z_x$, so entsteht die einfachere Gleichung

$$z_{x+1} - 2z_x = 0.$$

Aus diesen Gründen werden wir voraussetzen, daß die gegebene Gleichung die Form (2) hat und daß in ihr y_x enthalten ist. Wenn außer y_x noch y_{x+m}, aber kein y mit größerem Index vorkommt, so werden wir (2) eine Gleichung m^{ter} Ordnung nennen. Die eben betrachtete Gleichung

$$\Delta^3 y_x + \Delta^2 y_x - \Delta y_x - y_x = 0$$

ist also eine Gleichung 1ter Ordnung.

47. Partikuläre und allgemeine Lösungen. Wir werden voraussetzen, daß die vorgelegte Differenzengleichung n^{ter} Ordnung die Form hat

$$y_{x+n} = f(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+n-1}). \tag{3}$$

Die Funktion f soll für alle betrachteten Werte von $x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+n-1}$ einen endlichen und bestimmten Wert erhalten.

Jeder Ausdruck $y_x = \varphi(x)$, der dieser Gleichung genügt, heißt partikuläre Lösung von (3).

Es gibt unendlich viele partikuläre Lösungen. Um dies zu zeigen, wollen wir den Größen $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ willkürliche Werte beilegen.

Aus (3) ergibt sich für $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ das System der Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} y_n = f(0, & y_0, & y_1, & y_2, \ldots, & y_{n-1}), \\ y_{n+1} = f(1, & y_1, & y_2, & y_3, \ldots, & y_n), \\ y_{n+2} = f(2, & y_2, & y_3, & y_4, \ldots, & y_{n+1}), \\ y_{n+3} = f(3, & y_3, & y_4, & y_5, \ldots, & y_{n+2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

aus welchem y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, $y_{n+3}, \ldots$ sukzessive berechnet werden können. Es hat also y_x einen ganz bestimmten Wert für ganze positive x, sobald $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ gegeben sind. Man kann also schreiben

$$(5)\qquad y_x = F(x, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}).$$

Die Wahl der Anfangswerte $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ist nur einer Bedingung unterworfen: es sollen alle Gleichungen des Systems (4) einen Sinn haben.

Es ist möglich, daß die Funktion

$$f(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+n-1})$$

einen bestimmten Wert erhält für $x \geqq a$ und für beliebige Werte von $y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+n-1}$.

Dann besteht das System

$$(6)\quad \begin{cases} y_{a+n} = f(a, & y_a, & y_{a+1}, & y_{a+2}, \ldots, & y_{a+n-1}), \\ y_{a+n+1} = f(a+1, & y_{a+1}, & y_{a+2}, & y_{a+3}, \ldots, & y_{a+n}), \\ y_{a+n+2} = f(a+2, & y_{a+2}, & y_{a+3}, & y_{a+4}, \ldots, & y_{a+n+1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Daraus folgt die Relation

$$(7)\qquad y_x = \Phi(x, y_a, y_{a+1}, y_{a+2}, \ldots, y_{a+n-1})$$

für $x \geqq a$. Hier ist die Differenz $x - a$ gleich einer ganzen positiven Zahl.

In den Formeln (5) und (7) sind $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ oder $y_a, y_{a+1}, y_{a+2}, \ldots, y_{a+n-1}$ willkürliche Konstanten.

Jede Lösung der Gleichung (3) von der Form

$$(8)\qquad y_x = \psi(x, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n),$$

die n willkürliche Konstanten enthält, heißt allgemeine Lösung, wenn es möglich ist, die Gleichung (8) in die Form (5) oder (7) zu bringen.

Zu diesem Zweck muß man aus dem System

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \psi(0, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_1 &= \psi(1, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 &= \psi(2, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} &= \psi(n-1, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{aligned}\right\}(9) \text{ oder } (10)\left\{\begin{aligned} y_a &= \psi(a, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_{a+1} &= \psi(a+1, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_{a+2} &= \psi(a+2, \quad C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{a+n-1} &= \psi(a+n-1, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{aligned}\right.$$

die Konstanten $C_1, C_2, \ldots, C_n$ durch $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ oder durch $y_a, y_{a+1}, y_{a+2}, \ldots, y_{a+n-1}$ ausdrücken.

Man nennt die willkürlichen Konstanten $C_1, C_2, \ldots, C_n$ wesentlich, wenn das System (9) oder (10) in bezug auf diese Konstanten lösbar ist.

Allgemeine Lösung von (3) ist also eine Lösung, die n wesentliche Konstanten enthält.

Aus einer allgemeinen Lösung lassen sich viele andere ableiten. Es genügt in (8)

$$C_h = \alpha_{1h}c_1 + \alpha_{2h}c_2 + \cdots + \alpha_{nh}c_n$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n)$$

zu setzen. Die Koeffizienten α_{kh} sind nur einer Bedingung unterworfen, daß die Determinante $|\alpha_{kh}|$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots, n)$ nicht verschwindet. In diesem Falle lassen sich $c_1, c_2, \ldots, c_n$ durch $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ausdrücken.

48. Eigenschaften der linearen Differenzengleichungen. Eine Gleichung von der Form

$$(11) \qquad y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_{n-1} y_{x+1} + p_n y_x = Q_x$$

heißt lineare Gleichung. Die Koeffizienten $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ und das letzte Glied Q_x sind gegebene Funktionen von x. Wenn wir Q_x durch Null ersetzen, so entsteht die entsprechende homogene Gleichung

$$(12) \qquad y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_{n-1} y_{x+1} + p_n y_x = 0.$$

Die Gleichung (11) heißt eine vollständige, wenn Q_x nicht gleich Null ist.

Es sei Y_x eine partikuläre Lösung von (11). Wenn man in die linke Seite dieser Gleichung

$$(13) \qquad y_x = Y_x + z_x$$

einsetzt, so findet man

$$Y_{x+n} + p_1 Y_{x+n-1} + p_2 Y_{x+n-2} + \cdots + p_{n-1} Y_{x+1} + p_n Y_x$$

$$+ z_{x+n} + p_1 z_{x+n-1} + p_2 z_{x+n-2} + \cdots + p_{n-1} z_{x+1} + p_n z_x.$$

Die erste Zeile ist nach der Voraussetzung gleich Q_x. Daraus folgt, daß der Ausdruck (13) der vollständigen Gleichung genügt, wenn z_x eine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung (12) ist.

Wenn

$$y_x = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_x)$$

allgemeine Lösung von (12) ist, dann ist

$$y_x = Y_x + \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_x)$$

allgemeine Lösung der vollständigen Gleichung (11).

Lineare homogene Gleichungen besitzen folgende bemerkenswerte Eigenschaften:

1. Wenn z_x eine Lösung von (12) ist, so ist auch Cz_x eine Lösung. Dies folgt aus der Relation

$$Cz_{x+n} + p_1 Cz_{x+n-1} + p_2 Cz_{x+n-2} + \cdots + p_{n-1} Cz_{x+1} + p_n Cz_x$$
$$= C(z_{x+n} + p_1 z_{x+n-1} + p_2 z_{x+n-2} + \cdots + p_n z_x).$$

Hier ist C eine willkürliche Konstante.

2. Wenn $z_x^{(1)}$ und $z_x^{(2)}$ Lösungen von (12) sind, so ist auch $z_x^{(1)} + z_x^{(2)}$ eine Lösung, weil

$$z_{x+n}^{(1)} + z_{x+n}^{(2)} + p_1(z_{x+n-1}^{(1)} + z_{x+n-1}^{(2)}) + p_2(z_{x+n-2}^{(2)} + z_{x+n-2}^{(2)}) + \cdots$$
$$+ p_n(z_x^{(1)} + z_x^{(2)}) = (z_{x+n}^{(1)} + p_1 z_{x+n-1}^{(1)} + p_2 z_{x+n-2}^{(1)} + \cdots + p_n z_x^{(1)})$$
$$+ (z_{x+n}^{(2)} + p_1 z_{x+n-1}^{(2)} + p_2 z_{x+n-2}^{(2)} + \cdots + p_n z_x^{(2)})$$

ist.

Aus diesen Sätzen folgt der wichtige Satz:

3. Sind $z_x^{(1)}, z_x^{(2)}, \ldots, z_x^{(n)}$ verschiedene Lösungen der linearen homogenen Gleichung, so ist auch

$$y_x = C_1 z_x^{(1)} + C_2 z_x^{(2)} + \cdots + C_n z_x^{(n)} \tag{14}$$

eine Lösung. Hier sind $C_1, C_2, \ldots, C_n$ willkürliche Konstanten. Wenn dieselben wesentlich verschieden sind, dann ist der Ausdruck (14) allgemeine Lösung von (12).

In Nr. 47 haben wir gesehen, daß eine Differenzengleichung eine Funktion definiert, wenn die Anfangswerte gegeben sind. Um n partikuläre Lösungen zu bilden, genügt es, n Systeme von Anfangswerten anzugeben

$$(15)\qquad \begin{cases} z_0^{(1)}, & z_1^{(1)}, & z_2^{(1)}, \ldots, & z_{n-1}^{(1)}, \\ z_0^{(2)}, & z_1^{(2)}, & z_2^{(2)}, \ldots, & z_{n-1}^{(2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_0^{(n)}, & z_1^{(n)}, & z_2^{(n)}, \ldots, & z_{n-1}^{(n)}. \end{cases}$$

Wenn die Determinante, die aus diesen Elementen gebildet ist, nicht verschwindet, dann sind im Ausdruck (14) die Konstanten wesentlich verschieden und die Formel (14) ist wirklich allgemeine Lösung der Gleichung (12).

Wir bekommen also den Satz:

Die allgemeine Lösung einer linearen homogenen Gleichung ist eine lineare homogene Funktion der willkürlichen Konstanten.

Es war bei dem Beweise dieses Satzes vorausgesetzt, daß die Koeffizienten der gegebenen homogenen Gleichung einen Sinn haben für ganze positive x.

Wenn aber wir nur behaupten können, daß $p_1, p_2, \ldots, p_n$ endliche und bestimmte Werte haben für $x \geqq a$, dann ist das System (15) durch das folgende

$$(16)\qquad \begin{cases} z_a^{(1)}, & z_{a+1}^{(1)}, \ldots, & z_{a+n-1}^{(1)}, \\ z_a^{(2)}, & z_{a+1}^{(2)}, \ldots, & z_{a+n-1}^{(2)}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_a^{(n)}, & z_{a+1}^{(n)}, \ldots, & z_{a+n-1}^{(n)} \end{cases}$$

zu ersetzen.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen gehen wir jetzt zu speziellen Gleichungen über.

Zweites Kapitel.

Lineare Differenzengleichungen erster Ordnung.

49. Homogene Gleichung. Um die allgemeine Lösung der Gleichung

$$(1)\qquad y_{x+1} - A_x y_x = 0$$

zu bilden, geben wir der Größe y_0 einen beliebigen Wert. Aus (1) folgt dann

$$\begin{aligned} y_1 &= A_0 y_0, \\ y_2 &= A_1 y_1 = A_0 A_1 y_0, \\ y_3 &= A_2 y_2 = A_0 A_1 A_2 y_0, \ldots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_x &= A_0 A_1 A_2 \ldots A_{x-1} y_0. \end{aligned}$$

Weil y_0 willkürlich ist, kann man schreiben

$$y_x = C \cdot A_0 \cdot A_1 \cdot A_2 \ldots A_{x-1}, \tag{2}$$

wo C die willkürliche Konstante ist. Das ist die gesuchte Lösung.

Wir werden voraussetzen, daß in (2) keine der Größen A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_{x-1}$ gleich Null ist. Sonst hätten wir die evidente Lösung $y_x = 0$, die kein Interesse bietet.

Wenn für alle $x \geqq a$ die Funktion A_x einen endlichen, bestimmten und von Null verschiedenen Wert hat, dann ist die allgemeine Lösung unserer Gleichung

$$y_x = C \cdot A_a \cdot A_{a+1} \cdot A_{a+2} \ldots A_{x-1}. \tag{3}$$

50. Vollständige Gleichung. Um die Gleichung

$$y_{x+1} - A_x y_x = B_x \tag{4}$$

aufzulösen, setzen wir

$$y_x = u_x \cdot v_x, \tag{5}$$

wo u_x und v_x neue unbekannte Funktionen sind; eine derselben wählen wir so, daß die Gleichung für die andere Funktion möglich einfach sei.

Da

$$v_{x+1} = v_x + \Delta v_x$$

ist, so nimmt die Gleichung

$$u_{x+1} \cdot v_{x+1} - A_x u_x v_x = B_x$$

die Form an

$$u_{x+1}(v_x + \Delta v_x) - A_x u_x v_x = B_x$$

oder

$$(u_{x+1} - A_x u_x) v_x + u_{x+1} \cdot \Delta v_x = B_x. \tag{6}$$

Wenn u_x eine partikuläre Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung (1) ist, dann erhalten wir die Gleichung

$$u_{x+1} \cdot \Delta v_x = B_x,$$

die v_x bestimmt. Es ist

$$v_x = \sum \frac{B_x}{u_{x+1}} + C$$

und folglich

$$y_x = u_x \left[\sum \frac{B_x}{u_{x+1}} + C \right]. \tag{7}$$

Aus der Betrachtung in Nr. 49 folgt, daß man

$$u_x = A_0 A_1 A_2 \ldots A_{x-1} \quad \text{oder} \quad u_x = A_a A_{a+1} \ldots A_{x-1}$$

setzen kann. In diesen partikulären Lösungen ist $u_0 = 1$ oder $u_a = 1$.

51. Beispiele. 1. Es sei die Gleichung

$$y_{x+1} - 3y_x = a^x$$

gegeben. Hier ist $A_x = 3$, $B_x = a^x$,

$$A_0 = A_1 = A_2 = \cdots = A_{x-1} = 3,$$

$$u_x = 3^x,$$

Die Formel

$$v_x = \sum \frac{a^x}{3^{x+1}} + C$$

hat verschiedene Werte, je nachdem $a = 3$ oder $a \gtrless 3$.

Wenn a von 3 verschieden ist, dann ist

$$\sum \frac{a^x}{3^{x+1}} = \frac{1}{3}\sum\left(\frac{a}{3}\right)^x = \frac{1}{3}\,\frac{\left(\frac{a}{3}\right)^x}{\frac{a}{3}-1} + C$$

und folglich

$$y_x = C\cdot 3^x + \frac{a^x}{a-3}.$$

Wenn aber $a = 3$ ist, so ist

$$\sum \frac{a^x}{3^{x+1}} = \frac{1}{3}\Sigma 1 = \frac{1}{3}x + C$$

und

$$y_x = C\cdot 3^x + \frac{1}{3}x\cdot 3^x.$$

2. Wenn wir die Gleichung

$$y_{x+1} + \frac{3x+1}{3x+7}y_x = \frac{x}{(3x+4)(3x+7)}$$

nehmen, so ist

$$A_x = -\frac{3x+1}{3x+7}, \quad B_x = \frac{x}{(3x+4)(3x+7)},$$

$$u_x = (-1)^x\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{7}{13}\cdot\frac{10}{16}\cdots\frac{3x-5}{3x+1}\cdot\frac{3x-2}{3x+4}$$

$$= (-1)^x\cdot\frac{1\cdot 4}{(3x+1)(3x+4)},$$

$$\frac{B_x}{u_{x+1}} = -\frac{1}{4}(-1)^x\cdot x,$$

$$\Sigma(-1)^x\cdot x = \Sigma x\cdot\Delta\frac{(-1)^x}{-2} = -\frac{1}{2}x(-1)^x - \frac{1}{2}\Sigma(-1)^x$$

$$= (-1)^x\left[-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right] + C.$$

Folglich ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$y_x = (-1)^x\cdot\frac{1}{(3x+1)(3x+4)}\cdot C + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{(3x+1)(3x+4)}.$$

3. Als letztes Beispiel wollen wir noch die Gleichung

$$y_{x+1} - \frac{2x+7}{2x+1} \cdot \frac{3x+1}{3x+4} y_x = \frac{1}{3x+4}$$

auflösen. Es ist

$$u_x = \frac{7}{1} \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{11}{5} \cdots \frac{2x+5}{2x-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{10} \cdots \frac{3x-2}{3x+1} = \frac{(2x+1)(2x+3)(2x+5)}{15(3x+1)},$$

$$\frac{B_x}{u_{x+1}} = \frac{15}{(2x+3)(2x+5)(2x+7)},$$

$$\sum \frac{1}{(2x+3)(2x+5)(2x+7)} = \frac{1}{8} \sum \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)}$$

$$= -\frac{1}{16} \frac{1}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}\right)} + C = -\frac{1}{4} \frac{1}{(2x+3)(2x+5)} + C,$$

$$y_x = \frac{(2x+1)(2x+3)(2x+5)}{3x+1} \cdot C - \frac{1}{4} \cdot \frac{2x+1}{3x+1}.$$

(Vgl. Markoff, A. A. Differenzenrechnung, S. 156—158.)

Jetzt wollen wir die Anwendungen der Gleichungen erster Ordnung zeigen. Die Koeffizienten verschiedener Entwicklungen genügen Differenzengleichungen. Die Auflösung derselben führt zur Bestimmung der Koeffizienten. Als Beispiel nehmen wir die binomische Entwicklung und die Entwicklung von cos xt nach Potenzen von cos t.

52. Die binomische Entwicklung. Das Produkt von x Faktoren

$$(1+t)(1+t)\dots(1+t)$$

hat die Form

$$(1+t)^x = 1 + A_x t + B_x t^2 + C_x t^3 + \cdots + H_x t^{x-1} + K_x t^x.$$

Der letzte Koeffizient ist gleich Eins. Die Funktion

A_x hat einen Sinn für $x \geqq 1$,
B_x „ „ „ „ $x \geqq 2$,
C_x „ „ „ „ $x \geqq 3$,
. . . .

Die Anfangswerte sind

$$A_1 = 1, \quad B_2 = 1, \quad C_3 = 1, \dots$$

Nach Multiplikation mit $1+t$ findet man

$$(1+t)^{x+1} = 1 + (1+A_x)t + (A_x+B_x)t^2 + (B_x+C_x)t^3 + \cdots$$
$$\cdots + (H_x+K_x)t^x + K_x t^{x+1}.$$

Anderseits ist

$$(1+t)^{x+1} = 1 + A_{x+1}t + B_{x+1}t^2 + C_{x+1}t^3 + \cdots$$
$$\cdots + H_{x+1}t^{x-1} + K_{x+1}t^x + L_{x+1}t^{x+1}.$$

Daraus folgt

$$A_{x+1} = A_x + 1,$$
$$B_{x+1} = B_x + A_x,$$
$$C_{x+1} = C_x + B_x,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$K_{x+1} = K_x + H_x.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gibt

$$A_x = \Sigma 1 \;= x + c; \quad \text{es ist } c = 0, \text{ weil } A_1 = 1 \text{ ist.}$$
$$B_x = \Sigma A_x = \Sigma x = \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + c.$$

Aus der Bedingung $B_2 = 1$ folgt $c = 0$ und

$$B_x = \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}.$$
$$C_x = \Sigma B_x = \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + c.$$

Die willkürliche Konstante c ist $= 0$, weil $C_3 = 1$ ist.
In dieser Weise erhalten wir die binomische Entwicklung

$$(1+t)^x = 1 + xt + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}t^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}t^3 + \cdots$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)\ldots[x-(x-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots x}t^x.$$

Der letzte Koeffizient ist gleich Eins, wie es auch sein sollte.

53. Entwicklung von cos xt nach Potenzen von cos t. Nach der Moivreschen Formel ist

$$(\cos t + i\sin t)^x = \cos xt + i\sin xt.$$

Der Vergleich der reellen Teile beider Seiten dieser Gleichung ergibt

$$\cos xt = \cos^x t - \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\sin^2 t\cdot\cos^{x-2}t$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4 t\cdot\cos^{x-4}t - \cdots$$

Wenn man die geraden Potenzen von sin t durch cos t ausdrückt, so findet man eine Gleichung von der Form

$$\cos xt = A_x\cos^x t + B_x\cos^{x-2}t + C_x\cos^{x-4}t + \cdots$$

Es sollen die Koeffizienten A_x, B_x, $C_x, \ldots$ bestimmt werden.

Der Kürze halber wollen wir $\cos t$ mit u bezeichnen. In der Entwicklung

$$\cos xt = A_x u^x + B_x u^{x-2} + C_x u^{x-4} + D_x u^{x-6} + \cdots$$

hat die Funktion

$$\begin{array}{llll} A_x & \text{einen Sinn} & \text{für} & x \geqq 1, \\ B_x & \text{"} & \text{"} & x \geqq 2, \\ C_x & \text{"} & \text{"} & x \geqq 4, \\ D_x & \text{"} & \text{"} & x \geqq 6, \\ \ldots & & & \end{array}$$

Aus der Formel $\cos t = A_1 u$ folgt, daß $A_1 = 1$ ist. Um die übrigen Anfangswerte zu bestimmen, genügt es, in den Formeln

$$\begin{aligned} \cos 2t &= A_2 u^2 + B_2, \\ \cos 4t &= A_4 u^4 + B_4 u^2 + C_4, \\ \cos 6t &= A_6 u^6 + B_6 u^4 + C_6 u^2 + D_6 \\ &\ldots \end{aligned}$$

$t = \frac{\pi}{2}$ oder $u = 0$ zu setzen. Man findet

$$B_2 = -1, \quad C_4 = 1, \quad D_6 = -1, \ldots$$

Aus der Relation

$$\cos(x+1)t + \cos(x-1)t = 2\cos t \cdot \cos xt$$

folgt die Identität

$$\begin{aligned} A_{x+1} u^{x+1} + (B_{x+1} + A_{x-1}) u^{x-1} + (C_{x+1} + B_{x-1}) u^{x-3} + \cdots \\ = 2 A_x u^{x+1} + 2 B_x u^{x-1} + 2 C_x u^{x-3} + \cdots \end{aligned}$$

Der Vergleich der Koeffizienten führt zu den Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} A_{x+1} - 2A_x &= 0, \\ B_{x+1} - 2B_x &= -A_{x-1}, \\ C_{x+1} - 2C_x &= -B_{x-1}, \\ D_{x+1} - 2D_x &= -C_{x-1}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich, wenn man neue Funktionen einführt.

Wenn wir setzen

$$A_x = 2^{x-1} \cdot a_x, \quad B_x = -2^{x-3} \cdot b_x, \quad C_x = 2^{x-5} \cdot c_x, \ldots,$$

so finden wir

$$\begin{aligned} a_{x+1} - a_x &= 0, \\ b_{x+1} - b_x &= a_{x-1}, \\ c_{x+1} - c_x &= b_{x-1}, \\ d_{x+1} - d_x &= c_{x-1}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Die Anfangswerte sind

$$a_1 = 1, \quad b_2 = 2, \quad c_4 = 2, \quad d_6 = 2, \ldots$$

Aus der ersten Gleichung folgt, daß a_x konstant ist; da aber $a_1 = 1$ ist, so ist

$$a_x = 1 \quad \text{und} \quad A_x = 2^{x-1}.$$

Die zweite Gleichung gibt

$$b_x = \Sigma 1 = x + c.$$

Weil $b_2 = 2$ ist, so ist $c = 0$,

$$b_x = x \qquad \text{und} \qquad B_x = -2^{x-3} \cdot x.$$

Die weiteren Rechnungen sind

$$c_x = \Sigma(x-1) = \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} + c,$$

$$c_4 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + c, \quad c = -1,$$

$$c_x = \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2} - 1,$$

$$d_x = \sum\left[\frac{(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2} - 1\right] = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - x + c,$$

$$2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 6 + c, \quad c = 4,$$

$$d_x = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - (x-4),$$

$$e_x = \sum\left[\frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - (x-5)\right]$$

$$= \frac{(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(x-5)(x-6)}{1 \cdot 2} + c,$$

$$2 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + c, \quad c = 0,$$

$$e_x = \frac{(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(x-5)(x-6)}{1 \cdot 2},$$

$$f_x = \sum\left[\frac{(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{(x-6)(x-7)}{1 \cdot 2}\right]$$

$$= \frac{(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{(x-6)(x-7)(x-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + c,$$

$$2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + c, \quad c = 0,$$

$$f_x = \frac{(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{(x-6)(x-7)(x-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

. . . .

Die gefundenen Ausdrücke für c_x, d_x, e_x, f_x lassen sich vereinfachen. Es ist

$$c_x = \left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{x(x-3)}{1 \cdot 2},$$

$$d_x = (x-4) \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right) - 1\right] = \frac{x(x-4)(x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$e_x = \frac{(x-5)(x-6)}{1 \cdot 2} \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{3}\right)\left(1 - \frac{x}{4}\right) - 1\right] = \frac{x(x-5)(x-6)(x-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$f_x = \frac{(x-6)(x-7)(x-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left[\left(1 - \frac{x}{4}\right)\left(1 - \frac{x}{5}\right) - 1\right] = \frac{x(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

. . . .

Die gesuchten Koeffizienten haben also die Werte

$$A_x = 2^{x-1}, \quad B_x = -2^{x-3} \cdot x, \quad C_x = 2^{x-5} \cdot \frac{x(x-3)}{1 \cdot 2},$$

$$D_x = -2^{x-7} \cdot \frac{x(x-4)(x-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad E_x = 2^{x-9} \cdot \frac{x(x-5)(x-6)(x-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$F_x = -2^{x-11} \cdot \frac{x(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \ldots$$

P. L. Tschebyscheff hat bemerkt, daß die ganze Funktion x^{ten} Grades

$$f(u) = \frac{\cos xt}{2^{x-1}} = u^x + p_1 u^{x-1} + p_2 u^{x-2} + \cdots + p_{x-1} u + p_x$$

im Intervall $(-1, +1)$ weniger von Null abweicht, als jede andre ganze Funktion von derselben Form:

$$\varphi(u) = u_x + q_1 u^{x-1} + q_2 u^{x-2} + \cdots + q_{x-1} u + q_x.$$

(Oeuvres de P. L. Tchebychef, t. I, p. 295—301. Vgl. J. Bertrand, Traité de calcul différentiel et de calcul integral, t. I, p. 512—521.)

Die Abweichung von Null ist der größte absolute Betrag einer Funktion. Wenn z. B.

$$|F(u)| \leqq A \quad \text{für} \quad a < u < b,$$

so ist A die Abweichung von Null der Funktion $F(u)$ im Intervall (a, b).

Die Abweichung von Null der Funktion

$$f(u) = \frac{1}{2^{x-1}} \cos(x \arccos u)$$

im Intervall $(-1, +1)$ ist gleich $\frac{1}{2^{x-1}}$.

Wir wollen voraussetzen, daß im Intervall $(-1, +1)$ die Funktion $\varphi(u)$ weniger von Null abweicht, als $f(u)$.

Für
$$t = 0, \quad \frac{\pi}{x}, \quad \frac{2\pi}{x}, \ldots, \quad \frac{(x-1)\pi}{x}, \quad \pi$$
ist
$$u = 1, \quad \cos\frac{2\pi}{x}, \quad \cos\frac{2\pi}{x}, \ldots, \quad \cos\frac{(x-1)\pi}{x}, \quad -1,$$
$$f(u) = \frac{1}{2^{x-1}}, \quad -\frac{1}{2^{x-1}}, \quad \frac{1}{2^{x-1}}, \ldots, \quad (-1)^{x-1}\cdot\frac{1}{2^{x-1}}, \quad (-1)^x\frac{1}{2^{x-1}}.$$

Wenn wir der Kürze wegen die Bezeichnung einführen
$$u_k = \cos\frac{k\pi}{x}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, x),$$
so bestehen nach unsrer Voraussetzung die Ungleichheiten
$$f(u_0) - \varphi(u_0) > 0, \quad f(u_1) - \varphi(u_1) < 0, \quad f(u_2) - \varphi(u_2) > 0, \ldots$$

In jedem der Intervalle
$$(u_0, u_1), \quad (u_1, u_2), \ldots, \quad (u_{x-1}, u_x)$$
hat die Gleichung $f(u) - \varphi(u) = 0$ mindestens eine Wurzel und also im Intervall $(-1, +1)$ mindestens x verschiedene Wurzeln. Dies ist aber unmöglich, weil die ganze Funktion
$$f(u) - \varphi(u) = (p_1 - q_1)u^{x-1} + (p_2 - q_2)u^{x-2} + \cdots + (p_x - q_x)$$
den Grad $x - 1$ nicht übersteigen kann.

Damit ist also der Satz von Tschebyscheff bewiesen. Diesen Beweis verdanke ich einer mündlichen Mitteilung von Herrn A. A. Markoff.

(Vgl. Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Nr. 1052—1054.)

Drittes Kapitel.

Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten.

54. Partikuläre Lösungen der homogenen Gleichung. Um die Lösungen der Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(1)\ \ldots \qquad y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x = 0$$

zu finden, werden wir in die linke Seite dieser Gleichung einsetzen

$$(2) \qquad y_x = a^x \cdot u_x,$$

wo u_x eine ganze Funktion m^{ten} Grades ist.

Mit Benutzung der Formeln

$$y_{x+1} = a^{x+1} \cdot u_{x+1} = a^{x+1}(u_x + \Delta u_x),$$

$$y_{x+2} = a^{x+2}(u_x + 2\Delta u_x + \Delta^2 u_x),$$

$$y_{x+3} = a^{x+3}(u_x + 3\Delta u_x + 3\Delta^2 u_x + \Delta^3 u_x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{x+n} = a^{x+n}\left(u_x + n\Delta u_x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 u_x + \cdots + \Delta^n u_x\right)$$

findet man als Resultat dieser Substitution die Identität

$$\begin{aligned}
&y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x \\
&= a^x (a^n + p_1 a^{n-1} + p_2 a^{n-2} + \cdots + p_n) u_x \\
&+ a^{x+1}[n a^{n-1} + (n-1) p_1 a^{n-2} + (n-2) p_2 a^{n-3} + \cdots + p_{n-1}] \Delta u_x \\
&+ a^{x+2}[n(n-1) a^{n-2} + (n-1)(n-2) p_1 a^{n-3} + (n-2)(n-3) p_2 a^{n-4} + \cdots + 2 p_{n-2}] \frac{\Delta^2 u_x}{1\cdot 2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ a^{x+n} \cdot n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 \cdot \frac{\Delta^n u_x}{1\cdot 2\ldots n}.
\end{aligned}$$

Zur Abkürzung wollen wir die Bezeichnung einführen

$$f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots + p_n. \tag{3}$$

Die gefundene Identität nimmt dann die Form an

$$\left\{\begin{aligned}
&y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x \\
&= a^x \cdot f(a) \cdot u_x + a^{x+1} \cdot f'(a) \cdot \Delta u_x + a^{x+2} \cdot f''(a) \cdot \frac{\Delta^2 u_x}{1\cdot 2} + \cdots \\
&+ a^{x+n} \cdot f^{(n)}(a) \cdot \frac{\Delta^n u_x}{1\cdot 2\ldots n}.
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Unter y_x ist hier $a^x \cdot u_x$ zu verstehen.

Die rechte Seite von (4) verschwindet, wenn a eine Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ und $u_x = 1$ ist. Eine partikuläre Lösung von (1) ist dann a^x.

Wir wollen voraussetzen, daß a eine k-fache Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ ist. Die rechte Seite von (4) ist dann

$$a^{x+k} \cdot f^{(k)}(a) \cdot \frac{\Delta^k u_x}{1\cdot 2\ldots k} + a^{x+k+1} \cdot f^{(k+1)}(a) \cdot \frac{\Delta^{k+1} u_x}{1\cdot 2\ldots (k+1)} + \cdots$$

$$\cdots + a^{x+n} \cdot f^{(n)}(a) \cdot \frac{\Delta^n u_x}{1\cdot 2\ldots n}.$$

Dieser Ausdruck ist gleich Null, sobald u_x eine ganze Funktion vom $(k-1)^{\text{ten}}$ oder niedrigeren Grade ist. Wir setzen

$$u_x = 1;$$
$$u_0 = 0, \quad \Delta u_x = 1;$$
$$u_0 = 0, \quad \Delta u_0 = 0, \quad \frac{\Delta^2 u_x}{1 \cdot 2} = 1;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_0 = 0, \quad \Delta u_0 = 0, \quad \Delta^2 u_0 = 0, \dots, \quad \frac{\Delta^{k-1} u_x}{1 \cdot 2 \dots (k-1)} = 1.$$

Dann ist

$$u_x = 1, \quad u_x = x, \quad u_x = x(x-1), \dots$$
$$u_x = x(x-1)(x-2) \dots (x-k+2);$$

wir haben also k partikuläre Lösungen von (1)

$$a^x, \quad a^x \cdot x, \quad a^x \cdot x(x-1), \dots, \quad a^x \cdot x(x-1) \dots (x-k+2).$$

In Nr. 48 war es schon gezeigt, daß den partikulären Lösungen einer linearen homogenen Gleichung ein konstanter Faktor hinzugefügt werden kann. Deswegen kann man die gefundenen partikulären Lösungen durch die folgenden ersetzen

$$a^x, \quad xa^{x-1}, \quad x(x-1)a^{x-2}, \dots, \quad x(x-1) \dots (x-k+2)a^{x-k-1}.$$

Um diese Lösungen zu bilden, genügt es, die Funktion t^x zu nehmen und $(k-1)$ sukzessive Ableitungen nach t zu bilden und in den Resultaten t durch a zu ersetzen.

55. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Bei der Auflösung der Gleichung

$$y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \dots + p_n y_x = 0 \tag{1}$$

werden wir zwei Fälle unterscheiden: 1. die entsprechende algebraische Gleichung

$$f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \dots + p_{n-1} z + p_n = 0$$

hat verschiedene Wurzeln und 2. die Gleichung $f(z) = 0$ hat gleiche Wurzeln.

Wenn wir im ersten Falle die Wurzeln mit

$$a_1, \quad a_2, \dots, \quad a_n$$

bezeichnen, dann sind nach Nr. 54

$$a_1^x, \quad a_2^x, \dots, \quad a_n^x$$

partikuläre Lösungen von (1) und nach Nr. 48 genügt

$$y_x = C_1 a_1^x + C_2 a_2^x + C_3 a_3^x + \dots + C_n a_n^x \tag{5}$$

der Gleichung bei willkürlichen Werten der Konstanten

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_n.$$

Um zu beweisen, daß der Ausdruck (5) die allgemeine Lösung ist, genügt es zu zeigen, daß $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sich durch willkürlich gegebene Werte $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ausdrücken lassen.

Um das System

$$(6)\qquad \begin{cases} y_0 = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n, \\ y_1 = C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 + \cdots + C_n a_n, \\ y_2 = C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2 + C_3 a_3^2 + \cdots + C_n a_n^2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1} = C_1 a_1^{n-1} + C_2 a_2^{n-1} + C_3 a_3^{n-1} + \cdots + C_n a_n^{n-1} \end{cases}$$

aufzulösen, werden wir die Gleichungen des Systems mit unbestimmten Faktoren $q_{n-1}, q_{n-2}, q_{n-3}, \ldots, q_0$ multiplizieren und dann addieren. Das Resultat nimmt die Form an

$$(7)\qquad \begin{cases} q_{n-1} y_0 + q_{n-2} y_1 + q_{n-3} y_2 + \cdots + q_0 y_{n-1} \\ = C_1 \varphi(a_1) + C_2 \varphi(a_2) + C_3 \varphi(a_3) + \cdots + C_n \varphi(a_n), \end{cases}$$

wenn man die Bezeichnung

$$(8)\qquad \varphi(z) = q_0 z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + \cdots + q_{n-2} z + q_{n-1}$$

einführt.

Um C_1 zu bestimmen, werden wir $q_0, q_1, \ldots q_{n-1}$ so wählen, daß

$$\varphi(a_1) = 1, \quad \varphi(a_2) = 0, \quad \varphi(a_3) = 0, \ldots, \quad \varphi(a_n) = 0$$

wird. Es ist in diesem Falle

$$\varphi(z) = \frac{(z-a_2)(z-a_3)\ldots(z-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}$$

und die Relation (7) gibt

$$C_1 = q_{n-1} y_0 + q_{n-2} y_1 + \cdots + q_0 y_{n-1}.$$

In derselben Weise lassen sich $C_2, C_3, \ldots, C_n$ durch $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ausdrücken.

Damit ist also bewiesen, daß der Ausdruck (5) wirklich allgemeine Lösung von (1) ist.

Jetzt wollen wir voraussetzen, daß

$$f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots + p_{n-1} z + p_n = 0$$

gleiche Wurzeln besitzt.

In allen einzelnen Fällen ist die Beweisführung dieselbe. Deswegen genügt es, nur einen Fall zu betrachten. Wir werden voraussetzen, daß

$$f(z) = (z-a_1)^3 (z-a_4)(z-a_5)\ldots(z-a_n)$$

ist und daß die Zahlen a_1, a_4, a_5, ..., a_n voneinander verschieden sind.

Da wir n partikuläre Lösungen von (1) kennen (Nr. 54), so genügt der Ausdruck

$$(9)\quad \begin{cases} y_x = C_1 a_1^x + C_2 x a_1^{x-1} + C_3 x(x-1) a_1^{x-2} \\ \quad + C_4 a_4^x + C_5 a_5^x + \cdots + C_n a_n^x \end{cases}$$

unsrer Differenzengleichung. Es ist noch zu zeigen, daß das System

$$(10)\begin{cases} y_{n-1} = C_1 a_1^{n-1} + C_2 (n-1) a_1^{n-2} + C_3 (n-1)(n-2) a_1^{n-3} + C_4 a_4^{n-1} + \cdots + C_n a_n^{n-1}, \\ y_{n-2} = C_1 a_1^{n-2} + C_2 (n-2) a_1^{n-3} + C_3 (n-2)(n-3) a_1^{n-4} + C_4 a_4^{n-2} + \cdots + C_n a_n^{n-2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1 = C_1 a_1 + C_2\cdot 1 + C_3\cdot 0 + C_4 a_4 + \cdots + C_n a_n, \\ y_0 = C_1\cdot 1 + C_2\cdot 0 + C_3\cdot 0 + C_4\cdot 1 + \cdots + C_n\cdot 1 \end{cases}$$

in bezug auf C_1, C_2, ..., C_n lösbar ist.

Wenn man die Gleichungen (10) mit q_0, q_1, ..., q_{n-2}, q_{n-1} multipliziert und zusammenaddiert, so findet man

$$(11)\quad \begin{cases} q_0 y_{n-1} + q_1 y_{n-2} + \cdots + q_{n-2} y_1 + q_{n-1} y_0 \\ = C_1 \varphi(a_1) + C_2 \varphi'(a_1) + C_3 \varphi''(a_1) + C_4 \varphi(a_4) + \cdots + C_n \varphi(a_n). \end{cases}$$

Hier ist

$$\varphi(z) = q_0 z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + \cdots + q_{n-2} z + q_{n-1}.$$

Um C_1 zu bestimmen, genügt es, die Koeffizienten q_0, q_1, ..., q_{n-2}, q_{n-1} so zu wählen, daß

$$\varphi(a_1) = 1,\quad \varphi'(a_1) = 0,\quad \varphi''(a_1) = 0,\quad \varphi(a_4) = 0, \ldots,\quad \varphi(a_n) = 0.$$

Um die Gleichungen

$$\varphi(a_4) = 0,\quad \varphi(a_5) = 0, \ldots,\quad \varphi(a_n) = 0$$

zu befriedigen, genügt es, zu setzen

$$(12)\qquad \varphi(z) = (z - a_4)(z - a_5)\ldots(z - a_n)\psi(z),$$

wo $\psi(z)$ eine willkürliche Funktion ist.

Aus (12) und aus den Bedingungen

$$\varphi(a_1) = 1,\quad \varphi'(a_1) = 0,\quad \varphi''(a_1) = 0$$

folgen die Werte für $\psi(a_1)$, $\psi'(a_1)$, $\psi''(a_1)$. Die Funktion vom niedrigsten Grade, die allen diesen Forderungen genügt, ist

$$\varphi(z) = (z - a_4)(z - a_5)\ldots(z - a_n)\Big[\psi(a_1) + (z - a_1)\psi'(a_1) + \frac{(z - a_1)^2}{1\cdot 2}\psi''(a_1)\Big].$$

In derselben Weise lassen sich die Konstanten C_2 und C_3 durch $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ ausdrücken.

Um C_4 zu bestimmen, genügt es, zu setzen

$$\varphi(z) = \frac{(z-a_1)^3(z-a_5)(z-a_6)\ldots(z-a_n)}{(a_4-a_1)^3(a_4-a_5)(a_4-a_6)\ldots(a_4-a_n)}.$$

Ebenso lassen sich die übrigen Konstanten $C_5, C_6, \ldots, C_n$ bestimmen.

Damit ist also bewiesen, daß (9) wirklich eine allgemeine Lösung der vorgelegten Differenzengleichung ist.

Durch die Einführung andrer willkürlicher Konstanten kann diese Lösung eine einfachere Form annehmen. Da der Ausdruck

$$C_1 + C_2 a_1^{-1} x + C_3 a_1^{-2} x(x-1)$$

eine willkürliche Funktion 2ten Grades ist, so kann man ihn durch $A_1 + A_2 x + A_3 x^2$ ersetzen.

Wir bekommen die folgende allgemeine Lösung unsrer Gleichung

$$y_x = (A_1 + A_2 x + A_3 x^2) a_1^x + C_4 a_4^x + \cdots + C_n a_n^x. \tag{13}$$

In allen Fällen gibt es also solche n Lösungen $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(n)}$ der gegebenen homogenen Gleichung, daß man das System

$$\begin{aligned}
y_0 &= C_1 u_0^{(1)} + C_2 u_0^{(2)} + \cdots + C_n u_0^{(n)},\\
y_1 &= C_1 u_1^{(1)} + C_2 u_1^{(2)} + \cdots + C_n u_1^{(n)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_{n-1} &= C_1 u_{n-1}^{(1)} + C_2 u_{n-1}^{(2)} + \cdots + C_n u_{n-1}^{(n)}
\end{aligned}$$

in bezug auf $C_1, C_2, \ldots, C_n$ auflösen kann. Deswegen ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} u_0^{(1)} & u_0^{(2)} & \ldots & u_0^{(n)} \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \ldots & u_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n-1}^{(1)} & u_{n-1}^{(2)} & \ldots & u_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} \tag{14}$$

von Null verschieden.

Als Beispiele wollen wir einige Gleichungen mit ihren allgemeinen Lösungen angeben.

$$1.\quad y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 0,$$
$$y_x = C_1 \cdot 2^x + C_2 \cdot 3^x.$$

$$2.\quad y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = 0,$$
$$y_x = C_1 + C_2 \cdot 6^x.$$

$$3.\quad y_{x+2} - 6y_{x+1} + 9y_x = 0,$$
$$y_x = (C_1 + C_2 x) \cdot 3^x.$$

56. Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Wenn alle Koeffizienten der Gleichung

$$y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x = 0$$

reell sind, so kann man verlangen, daß in der allgemeinen Lösung keine imaginären Größen auftreten.

Wir werden voraussetzen, daß die entsprechende algebraische Gleichung

$$z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots + p_n = 0$$

eine dreifache komplexe Wurzel hat, die wir mit a_1 bezeichnen. Nach einem Satze der Algebra hat diese Gleichung eine dreifache konjugierte Wurzel, die wir mit a_4 bezeichnen. Die übrigen Wurzeln $a_7, a_8, \ldots, a_n$ sollen reell und voneinander verschieden sein.

Die allgemeine Lösung unsrer Gleichung ist

$$y_x = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) a_1^x + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2) a_4^x$$
$$+ C_7 a_7^x + C_8 a_8^x + \cdots C_n a_n^x.$$

Wenn

$$a_1 = \varrho (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

gesetzt wird, so ist

$$a_4 = \varrho (\cos \alpha - i \sin \alpha),$$
$$a_1^x = \varrho^x (\cos x\alpha + i \sin x\alpha),$$
$$a_4^x = \varrho^x (\cos x\alpha - i \sin x\alpha).$$

Deswegen ist

$$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) a_1^x + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2) a_4^x$$
$$= [(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) \quad + (C_4 + C_5 x + C_6 x^2)] \varrho^x \cos \alpha x$$
$$+ [(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) i \ - (C_4 + C_5 x + C_6 x^2) i] \varrho^x \sin \alpha x.$$

Wenn man neue Konstanten einführt

$$A = C_1 + C_4, \qquad A_1 = C_2 + C_5, \qquad A_2 = C_3 + C_6,$$
$$B = (C_1 - C_4) i, \quad B_1 = (C_2 - C_5) i, \quad B_2 = (C_3 - C_6) i,$$

so erscheint die allgemeine Lösung unsrer Gleichung in der Form

$$y_x = \varrho^x \cdot [(A + A_1 x + A_2 x^2) \cos x\alpha + (B + B_1 x + B_2 x^2) \sin x\alpha] + C_7 a_7^x + \cdots + C_n a_n^x,$$

die keine imaginären Größen enthält.

Beispiele:

$$1.\ y_{x+2} + 2y_{x+1} + 4y_x = 0,$$

$$y_x = 2^x \cdot \left[A \cos\left(x \frac{2\pi}{3}\right) + B \sin\left(x \frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

$$2.\ y_{x+4} + y_x = 0,$$

$$y_x = C_1 \cos\left(x \frac{\pi}{4}\right) + C_2 \sin\left(x \frac{\pi}{4}\right) + C_3 \cos\left(x \frac{3\pi}{4}\right) + C_4 \sin\left(x \frac{3\pi}{4}\right).$$

57. Vollständige Gleichung. Um die Lösung der vollständigen Gleichung

$$(15) \qquad y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x = Q_x$$

zu suchen, werden wir voraussetzen, daß die Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung

$$z_{x+n} + p_1 z_{x+n-1} p_2 z_{x+n-2} + \cdots + p_n z_x = 0$$

schon bekannt ist. Es sei die allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$z_x = C_1 u_x^{(1)} + C_2 u_x^{(2)} + \cdots + C_n u_x^{(n)}.$$

Statt der willkürlichen Konstanten werden wir unbekannte Funktionen von x einführen, und der Ausdruck

$$(16) \qquad y_x = C_x^{(1)} u_x^{(1)} + C_x^{(2)} u_x^{(2)} + \cdots + C_x^{(n)} u_x^{(n)}$$

soll der vollständigen Gleichung genügen. Eine Bedingung haben wir zu erfüllen und n Funktionen zur Verfügung. Deswegen können wir $n - 1$ neue Bedingungen einführen. Lagrange wählt dieselben so, daß $y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n-1}$ dieselbe Form haben sollen, als ob die C_x Konstante wären.

Da $C_{x+1} = C_x + \Delta C_x$ ist, so finden wir das System von Gleichungen

$$\begin{aligned}
y_x &= C_x^{(1)} \cdot u_x^{(1)} + C_x^{(2)} \cdot u_x^{(2)} + \cdots + C_x^{(n)} \cdot u_x^{(n)},\\
y_{x+1} &= C_x^{(1)} \cdot u_{x+1}^{(1)} + C_x^{(2)} \cdot u_{x+1}^{(2)} + \cdots + C_x^{(n)} \cdot u_{x+1}^{(n)},\\
y_{x+2} &= C_x^{(1)} \cdot u_{x+2}^{(1)} + C_x^{(2)} \cdot u_{x+2}^{(2)} + \cdots + C_x^{(n)} \cdot u_{x+2}^{(n)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_{x+n-1} &= C_x^{(1)} \cdot u_{x+n-1}^{(1)} + C_x^{(2)} \cdot u_{x+n-1}^{(2)} + \cdots + C_x^{(n)} \cdot u_{x+n-1}^{(n)}.
\end{aligned}$$

Diese Formeln gelten, wenn die Funktionen C_x den Bedingungen genügen

$$(17)\quad \begin{cases} u^{(1)}_{x+1} \cdot \Delta C^{(1)}_x + u^{(2)}_{x+1} \cdot \Delta C^{(2)}_x + \cdots + u^{(n)}_{x+1} \cdot \Delta C^{(n)}_x = 0, \\ u^{(1)}_{x+2} \cdot \Delta C^{(1)}_x + u^{(2)}_{x+2} \cdot \Delta C^{(2)}_x + \cdots + u^{(n)}_{x+2} \cdot \Delta C^{(n)}_x = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ u^{(1)}_{x+n-1} \cdot \Delta C^{(1)}_x + u^{(2)}_{x+n-1} \cdot \Delta C^{(2)}_x + \cdots + u^{(n)}_{x+n-1} \cdot \Delta C^{(n)}_x = 0. \end{cases}$$

Es ist

$$\begin{aligned} y_{x+n} &= C^{(1)}_x \cdot u^{(1)}_{x+n} + C^{(2)}_x \cdot u^{(2)}_{x+n} + \cdots + C^{(n)}_x \cdot u^{(n)}_{x+n} \\ &\quad + u^{(1)}_{x+n} \cdot \Delta C^{(1)}_x + u^{(2)}_{x+n} \cdot \Delta C^{(2)}_x + \cdots + u^{(n)}_{x+n} \cdot \Delta C^{(n)}_x, \end{aligned}$$

und es kann nicht mehr y_{x+n} dieselbe Form haben, als ob die C_x konstant wären.

Wenn wir die Werte $y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots, y_{x+n}$ in die gegebene vollständige Gleichung einsetzen, so fallen die Glieder mit $C^{(1)}_x$, $C^{(2)}_x, \ldots, C^{(n)}_x$ weg und es bleibt die Gleichung

$$(18)\qquad u^{(1)}_{x+n} \cdot \Delta C^{(1)}_x + u^{(2)}_{x+n} \cdot \Delta C^{(2)}_x + \cdots + u^{(n)}_{x+n} \cdot \Delta C^{(n)}_x = Q_x.$$

Aus den n Gleichungen (17) und (18) mit den n Unbekannten $\Delta C^{(1)}_x$, $\Delta C^{(2)}_x, \ldots, \Delta C^{(n)}_x$ lassen sich dieselben bestimmen, wenn die Determinante

$$F(x) = \begin{vmatrix} u^{(1)}_{x+1} & u^{(2)}_{x+1} & \cdots & u^{(n)}_{x+1} \\ u^{(1)}_{x+2} & u^{(2)}_{x+2} & \cdots & u^{(n)}_{x+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(1)}_{x+n} & u^{(2)}_{x+2} & \cdots & u^{(n)}_{x+n} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Wir haben schon gesehen (Nr. 55), daß die partikulären Lösungen $u^{(1)}_x, u^{(2)}_x, \ldots, u^{(n)}_x$ der homogenen Gleichung so gewählt werden können, daß die Determinante

$$F(-1) = \begin{vmatrix} u^{(1)}_0 & u^{(2)}_0 & \cdots & u^{(n)}_0 \\ u^{(1)}_1 & u^{(2)}_1 & \cdots & u^{(n)}_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u^{(1)}_{n-1} & u^{(2)}_{n-1} & \cdots & u^{(n)}_{n-1} \end{vmatrix}$$

nicht gleich Null ist.

Aus der Relation

$$u_{x+n} + p_1 u_{x+n-1} p_2 u_{x+n-2} + \cdots + p_{n-1} u_{x+1} + p_n u_x = 0$$

folgt, daß

$$F(x) = \begin{vmatrix} u_{x+1}^{(1)} & u_{x+1}^{(2)} & \dots & u_{x+1}^{(n)} \\ u_{x+2}^{(1)} & u_{x+2}^{(2)} & \dots & u_{x+2}^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{x+n-1}^{(1)} & u_{x+n-1}^{(2)} & \dots & u_{x+n-1}^{(n)} \\ -p_n u_x^{(1)} & -p_n u_x^{(2)} & \dots & -p_n u_x^{(n)} \end{vmatrix},$$

weil man zu den Elementen der letzten Zeile die Elemente der vorigen Zeilen, resp. multipliziert mit $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$, addieren kann.

Es besteht also die Relation

$$F(x) = \pm p_n \cdot F(x-1).$$

Wäre $F(x) = 0$, so müßte auch $F(x-1) = 0$ sein, weil p_n nicht Null ist.

Aus denselben Gründen wäre auch

$$F(x-2) = 0, \quad F(x-3) = 0, \dots, \quad F(-1) = 0,$$

was aber nicht der Fall ist.

Es ist also bewiesen, daß $F(x)$ nicht Null ist. Die Gleichungen (17) und (18) sind lösbar. Man findet

$$\Delta C_x^{(1)} = v_x^{(1)}, \quad \Delta C_x^{(2)} = v_x^{(2)}, \dots, \quad \Delta C_x^{(n)} = v_x^{(n)}.$$

Die Summation gibt Resultate von der Form

$$C_x^{(1)} = w_x^{(1)} + C_1, \quad C_x^{(2)} = w_x^{(2)} + C_2, \dots, \quad C_x^{(n)} = w_x^{(n)} + C_n.$$

Demnach ist die Lösung der vollständigen Gleichung

$$y_x = C_1 u_x^{(1)} + C_2 u_x^{(2)} + \cdots + C_n u_x^{(n)}$$
$$+ u_x^{(1)} w_x^{(1)} + u_x^{(2)} w_x^{(2)} + \cdots + u_x^{(n)} w_x^{(n)}.$$

Es ist die allgemeine Lösung, weil die Determinante (14) von Null verschieden ist.

Diese Methode von Lagrange heißt Variation der willkürlichen Konstanten. (Lagrange, Oeuvres, t. 4, p. 156. Recherches sur les séries récurrentes.)

Als Beispiel nehmen wir die Gleichung

$$y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = x.$$

Wir setzen

$$y_x = C_x^{(1)} + C_x^{(2)} \cdot 6^x.$$

Es ist

$$y_{x+1} = C_x^{(1)} + C_x^{(2)} \cdot 6^{x+1},$$

wenn

$$\Delta C_x^{(1)} + 6^{x+1} \cdot \Delta C_x^{(2)} = 0$$

ist.

Es wird y_x der Gleichung genügen, wenn außerdem

$$\Delta C_x^{(1)} + 6^{x+2} \cdot \Delta C_x^{(2)} = x$$

ist. Daraus folgt

$$\Delta C_x^{(1)} = -\frac{1}{5}x, \quad \Delta C_x^{(2)} = \frac{1}{30}x \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x.$$

Die Summation gibt

$$C_x^{(1)} = -\frac{1}{10}x(x-1) + C_1,$$

$$C_x^{(2)} = -\frac{1}{25}x\left(\frac{1}{6}\right)^x - \frac{1}{125}\left(\frac{1}{6}\right)^x + C_2.$$

Die allgemeine Lösung unsrer Gleichung ist also

$$y_x = C_1 + C_2 \cdot 6^x - \frac{1}{10}x^2 + \frac{3}{50}x - \frac{1}{125}.$$

58. Man kann noch in einer andern Weise von der Lösung der homogenen Gleichung zur vollständigen (15) übergehen. Es genügt, eine partikuläre Lösung der vollständigen Gleichung zu kennen (Nr. 48). Wenn das letzte Glied

$$Q_x = a^x \cdot v_x$$

ist, wo v_x eine ganze Funktion ist, dann ist es leicht, eine solche Lösung zu finden.

Wir setzen

$$Y_x = a^x \cdot u_x,$$

wo u_x eine ganze Funktion ist, und führen diese Größe statt y_x in die vollständige Gleichung ein. Vermöge der Identität (4) findet man die Gleichung

$$a^x f(a) \cdot u_x + a^{x+1} \cdot f'(a) \cdot \Delta u_x + a^{x+2} \cdot f''(a) \cdot \frac{\Delta^2 u_x}{1 \cdot 2} + \cdots$$

$$\cdots + a^{x+n} \cdot f^{(n)}(a) \cdot \frac{\Delta^n u_x}{1 \cdot 2 \ldots n} = a^x \cdot v_x,$$

die zur Bestimmung von u_x dient.

Der Faktor a^x kann gehoben werden und es wird diese Gleichung die Form annehmen

$$(19) \quad f(a) \cdot u_x + a f'(a) \cdot \Delta u_x + a^2 f''(a) \cdot \frac{\Delta^2 u_x}{1 \cdot 2} + \cdots + a^n f^{(n)}(a) \cdot \frac{\Delta^n u_x}{1 \cdot 2 \ldots n} = v_x.$$

Wenn a keine Wurzel der Gleichung

$$f(z) = z^n + p_1 z^{n-1} + p_2 z^{n-2} + \cdots + p_n = 0$$

ist, dann ist u_x von demselben Grade wie v_x.

Es sei

$$u_x = \alpha_0 \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m} + \alpha_1 \frac{x(x-1)\ldots(x-m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}$$

$$+ \alpha_2 \frac{x(x-1)\ldots(x-m+3)}{1\cdot 2\ldots(m-2)} + \cdots + \alpha_{m-2}\frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + \alpha_{m-1}x + \alpha_m,$$

$$v_x = \beta_0 \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m} + \beta_1 \frac{x(x-1)\ldots(x-m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}$$

$$+ \beta_2 \frac{x(x-1)\ldots(x-m+3)}{1\cdot 2\ldots(m-2)} + \cdots + \beta_{m-2}\frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + \beta_{m-1}x + \beta_m.$$

Die Zahlen β sind gegeben und die α werden gesucht.

Aus (19) findet man durch den Vergleich der Koeffizienten

$$\alpha_0 f(a) = \beta_0,$$

$$\alpha_1 f(a) + \alpha_0 a f'(a) = \beta_1,$$

$$\alpha_2 f(a) + \alpha_1 a f'(a) + \alpha_0 a^2 \frac{f''(a)}{1\cdot 2} = \beta_2,$$

$$\alpha_3 f(a) + \alpha_2 a f'(a) + \alpha_1 a^2 \frac{f''(a)}{1\cdot 2} + \alpha_0 a^3 \frac{f'''(a)}{1\cdot 2\cdot 3} = \beta_3$$

. . . .

Da $f(a)$ nicht Null ist, so bestimmen sich sukzessive die Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$

Wenn a eine $k$fache Wurzel von $f(z) = 0$ ist, so nimmt die Gleichung (19) die Form an

$$a^k f^{(k)}(a)\cdot\frac{\Delta^k u_x}{1\cdot 2\ldots k} + a^{k+1}\cdot f^{(k+1)}(a)\cdot\frac{\Delta^{k+1}u_x}{1\cdot 2\ldots(k+1)} + \cdots$$

$$+ a^n f^{(n)}(a)\cdot\frac{\Delta^n u_x}{1\cdot 2\ldots n} = v_x.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine ganze Funktion m^{ten} Grades, wenn u_x vom $(k+m)^{\text{ten}}$ Grade ist.

Man kann setzen

$$u_x = \alpha_0 \frac{x(x-1)\ldots(x-k-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k+m)} + \alpha_1 \frac{x(x-1)\ldots(x-k-m+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k+m-1)} + \cdots$$

$$+ \alpha_{m-1}\frac{x(x-1)\ldots(x-k)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k+1)} + \alpha_m \frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k},$$

und zur Bestimmung der Koeffizienten findet man die Gleichungen

$$\alpha_0 a^k \frac{f^{(k)}(a)}{1\cdot 2\ldots k} = \beta_0,$$

$$\alpha_1 a^k \frac{f^{(k)}(a)}{1\cdot 2\ldots k} + \alpha_0 a^{k+1}\cdot\frac{f^{(k+1)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k+1)} = \beta_1,$$

$$\alpha_2 a^k \frac{f^{(k)}(a)}{1\cdot 2\ldots k} + \alpha_1 a^{k+1}\cdot\frac{f^{(k+1)}(a)}{1\cdot 2\ldots(k+1)} + \alpha_0 a^{k+2}\cdot\frac{f^{(k+2)}(a)}{1\cdot 2\ldots(k+2)} = \beta_2.$$

. . . .

Diese Gleichungen sind lösbar, weil a und $f^{(k)}(a)$ nicht gleich Null sind.

Z. B. wollen wir eine partikuläre Lösung der Gleichung

$$y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = x$$

suchen. Hier ist $a = 1$ und dieser Wert ist eine einfache Wurzel der Gleichung

$$z^2 - 7z + 6 = 0.$$

Deswegen gibt es eine partikuläre Lösung von der Form

$$Y_x = \alpha_0 \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} + \alpha_1 x.$$

In die gegebene Gleichung setzen wir ein

$$Y_x = bx + cx^2$$

und wir finden

$$b = \frac{3}{50}, \quad c = -\frac{1}{10}.$$

Nach dem bekannten Satze (Nr. 48) ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung

$$y_x = C_1 + C_2 \cdot 6^x + \frac{3}{50} x - \frac{1}{10} x^2.$$

Die Gleichung

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 1$$

hat eine partikuläre Lösung von der Form

$$Y_x = \alpha_0.$$

Aus der Gleichung

$$\alpha_0 - 5\alpha_0 + 6\alpha_0 = 1$$

folgt, daß $\alpha_0 = \frac{1}{2}$ ist. Deswegen ist die allgemeine Lösung unsrer Gleichung

$$y_x = C_1 \cdot 2^x + C_2 \cdot 3^x + \frac{1}{2}.$$

Wir wollen jetzt einige Anwendungen der Differenzengleichungen höherer Ordnung zeigen.

59. Rekurrente Reihen. Dies sind solche Reihen

$$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_x, y_{x+1}, \ldots,$$

für die je n aufeinander folgende Glieder einer Relation

$$y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x = 0$$

mit konstanten Koeffizienten genügen.

Die Auflösung dieser Differenzengleichung dient dazu, um das allgemeine Glied y_x als Funktion von x darzustellen.

Als Beispiel wollen wir die Reihe betrachten

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots,$$

deren jedes Glied die Summe der beiden vorhergehenden Glieder ist. Je drei nacheinander folgende Glieder sind durch die Relation verbunden

$$y_{x+2} - y_{x+1} - y_x = 0.$$

Die Anfangswerte sind

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$

Die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^2 - z - 1 = 0$$

sind

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Deswegen ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_x = C_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x.$$

Wenn C_1 und C_2 durch die Anfangswerte y_0 und y_1 bestimmt werden, findet man, daß das allgemeine Glied unsrer Reihe

$$y_x = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right]$$

ist.

Die Potenzreihe

$$F(t) = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + y_3 t^3 + \cdots + y_x t^x + \cdots,$$

deren Koeffizienten eine rekurrente Reihe bilden, ist gleich einer rationalen Funktion von t. Die Relation zwischen den n Koeffizienten der Reihe sei

$$y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x = 0.$$

Nach Multiplikation von $F(t)$ mit

$$1 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n$$

findet man

$$y_0 + (y_1 + p_1 y_0)t + (y_2 + p_1 y_1 + p_2 y_0)t^2 + (y_3 + p_1 y_2 + p_2 y_1 + p_3 y_0)t^3 + \\ \cdots + (y_{n-1} + p_1 y_{n-2} + p_2 y_{n-3} + \cdots + p_{n-1} y_0)t^{n-1}.$$

Die Koeffizienten der folgenden Potenzen sind die Werte der Funktion

$$y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x$$

für $x = 0, 1, 2, \ldots$ Deswegen sind alle diese Koeffizienten gleich Null.

Umgekehrt, die rationale Funktion

$$\frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}}{1 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n}$$

läßt sich in die Reihe

$$y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \cdots + y_x t^x + \cdots$$

entwickeln, für die je n aufeinander folgende Koeffizienten durch die Relation

$$y_{x+n} + p_1 y_{x+n-1} + p_2 y_{x+n-2} + \cdots + p_n y_x = 0$$

verbunden sind. Die n ersten Koeffizienten bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\begin{gathered} y_0 = a_0, \\ y_1 + p_1 y_0 = a_1, \\ y_2 + p_1 y_1 + p_2 y_0 = a_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1} + p_1 y_{n-2} + p_2 y_{n-3} + \cdots + p_{n-1} y_0 = a_{n-1}. \end{gathered}$$

Also können die Differenzengleichungen dazu dienen, um die Koeffizienten der Entwicklungen rationaler Funktionen in Potenzreihen zu bestimmen.

60. Tschebyscheffscher Beweis eines Satzes von Lamé. In seinen Vorlesungen zeigte Tschebyscheff die folgende Anwendung der Differenzengleichungen.

Man soll bestimmen, wie groß die Anzahl der sukzessiven Divisionen sein kann, um den größten gemeinschaftlichen Teiler zweier Zahlen a und b zu finden.

Es sei

$$a = bq_1 + r_1, \quad b = r_1 q_2 + r_2, \quad \ldots, \quad r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n, \quad r_n = 0.$$

Die Anzahl der Divisionen ist hier n.

Weil alle Quotienten größer oder gleich Eins sind, so ist

$$a \geqq b + r_1, \quad b \geqq r_1 + r_2, \quad r_1 \geqq r_2 + r_3, \ldots,$$
$$\ldots r_{n-3} \geqq r_{n-2} + r_{n-1}, \quad r_{n-2} \geqq r_{n-1}, \quad r_{n-1} \geqq 1.$$

Daraus folgen die Beziehungen

$$r_n = 0 \quad r_{n-1} \geqq 1, \quad r_{n-2} \geqq 1, \quad r_{n-3} \geqq 2,$$
$$r_{n-4} \geqq 3, \quad r_{n-5} \geqq 5, \quad r_{n-6} \geqq 8, \ldots$$

Wenn wir die Zahlen

$$y_0 = 0,\quad y_1 = 1,\quad y_2 = 1,\quad y_x = 2,\ \ldots,\quad y_x = y_{x-1} + y_{x-2},\ \ldots$$

einführen, so ist

$$r_n = y_0,\quad r_{n-1} \geqq y_1,\quad r_{n-2} \geqq y_2,\ \ldots,\quad b \geqq y_n.$$

Wenn für eine ganze positive Zahl m die Ungleichheit

$$y_m > b$$

besteht, dann ist notwendig $y_m > y_n$ und $m > n$. Die gesuchte Anzahl der Divisionen ist also kleiner als eine solche Zahl m, für die

$$y_m > b$$

ist. Den Ausdruck für y_x kennen wir schon aus Nr. 59. Es ist deswegen die Ungleichheit

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x\right] > b$$

aufzulösen.

Da

$$\sqrt{5} = 2,2\ldots;\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6\ldots;\quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,6\ldots,$$

so können wir y_x annähernd in der Weise ausdrücken

$$y_x = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x \pm \theta,$$

wo θ zwischen 0 und 1 ist.

Wenn

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m \geqq b + 1$$

ist, dann ist

$$y_m \geqq b + (1 \pm \theta) \text{ und folglich } y_m > b.$$

Es genügt

$$m \geqq \frac{\log [2,2 \cdot (b+1)]}{\log 1,6}$$

zu nehmen. Wenn die Zahl b aus k Ziffern besteht, dann ist der gemeine Logarithmus von $2,2 \cdot (b+1)$ ungefähr gleich k, $\log 1,6$ ist beinahe $\frac{1}{5}$ und

$$m \geqq 5k.$$

Daraus folgt der Satz von G. Lamé: **Die Anzahl der Divisionen, die auszuführen ist, um den größten gemeinschaftlichen Teiler der Zahlen a und b ($a > b$) zu finden, ist kleiner als die fünffache Anzahl der Ziffern der Zahl b.**

Lamé hat diesen Satz auf elementarem Wege bewiesen. (Paris. Comptes rendus, 19. [1844], p. 867.)

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

